47 Probabilités que deux entiers soient premiers entre eux

ref : FGN algèbre 1, p.156.

THÉORÈME 47.1 *Pour $n \geq 1$, on note r_n la probabilité que deux entiers de $[1, n]$ soient premiers entre eux. On définit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$ et $\mu(d) = 0$ si d a un facteur carré. Alors :*
- $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E(\frac{n}{d})^2$
- $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$

PREUVE. On note A_n l'ensemble des couples $(a, b) \in [1, n]^2$ tels que $a \wedge b = 1$. On a alors $r_n = \frac{|A_n|}{n^2}$. On note $p_1, \dots, p_k$ l'ensemble des nombres premiers plus petits que n et U_i l'ensemble des couples (a, b) tels que p_i divise a et b. Alors A_n est le complémentaire de l'union des U_i. Pour calculer le cardinal de l'union des U_i, on utilise la formule du crible :

$$\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i) = \sum_{I \neq, I \subset [1,k]} (-1)^{1+\mathrm{card}(I)} \mathrm{card}(\bigcap_{i \in I} U_i)$$

Pour $I \subset [1, k]$, l'intersection $\cap_{i \in I} U_i$ est l'ensemble des couples (a, b) tels a et b sont divisibles par $\prod_{i \in I} p_i$. Il y a exactement $E(\frac{n}{\prod p_i})$ nombre de $[1, n]$ divisible par $\prod p_i$, car il faut simplement choisir le quotient de n par $\prod p_i$. Pour avoir le nombre de couples de nombres divisibles par $\prod p_i$ on élève au carré : on trouve $E(\frac{n}{\prod p_i})^2$.

La formule du crible donne alors :

$$\mathrm{card}(A_n) = n^2 - \mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{k} U_i) = n^2 - \sum_{I \neq, I \subset [1,k]} (-1)^{\mathrm{card}(I)+1} E(\frac{n}{\prod_{i \in I} p_i})^2$$
$$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E(\frac{n}{d})^2$$

puisque tout entier entre 1 et n est un produit des p_i, et seuls apparaissent les nombres sans facteur carré dans la somme grâce à la multiplication par μ.

Donc

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) E(\frac{n}{d})^2$$

Comme $\frac{1}{n^2} E(\frac{n}{d})^2 \sim d^2$, on est amené à comparer r_n à $\sum_d \frac{\mu(d)}{d^2}$.

On a $\frac{n}{d} - 1 < E(\frac{n}{d}) \leq \frac{n}{d}$ que l'on élève au carré, puisque tout est positif, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2} E(\frac{n}{d})^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0$$

Cela permet de majorer :

$$|r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}| \leq \sum_{d=1}^{n} \frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2} = O(\frac{\ln n}{n})$$

puisque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Calculons le produit $\sum \frac{1}{n^2} \times \sum \frac{\mu(d)}{d^2}$. Comme chacune de ces séries est sommable, la suite double $\sum_{n,d} \frac{\mu(d)}{d^2 n^2}$ est aussi sommable. On écrit la partition :

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*} \{(d,n)|dn = i\} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*} \bigsqcup_{l|i} \{(n,d)|nd = i, d = l\}$$

Donc :

$$\sum_{d,n} \frac{\mu(d)}{d^2n^2} = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{l|i} \frac{\mu(l)}{i^2} = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{i^2} \sum_{l|i} \mu(l)$$

Il nous reste à calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$. On pose $S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$. On a $S(1) = 1$, montrons que $S(n) = 0$ pour $n \geq 2$. Décomposons n en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, les diviseurs de n sont des produits de p_i et leur μ est nul dès qu'un facteur carré apparait. On regroupe les diviseurs d de n selon le nombre de facteurs premiers qu'ils contiennent :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i = (1-1)^k = 0$$

Donc $\sum_{d,n} \frac{\mu(d)}{n^2d^2} = 1$ et comme $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on trouve $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$.

$\square$

Leçons concernées : convergence suite, séries, combinatoire.