

Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

CloudSea

Cadre

Soit E un espace euclidien de dimension n

On montre que $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Mieux : tout $u \in O(E)$ est le produit d'au plus r réflexions orthogonales où $r = \text{rg}(u - \text{id})$

On montre ensuite la même chose pour $SO(E)$ et les renversements

Recasages :

- [[108 Parties génératrices d'un groupe]]
- [[148 Dimension d'un espace vectoriel]]
- [[158 Endomorphismes d'un espace euclidien]]
- [[161 Espaces euclidiens]]

Backup :

- [[106 Groupe linéaire]] à mettre dans le plan et éventuellement faire à la place de $SO_2(\mathbb{F}_q)$
- [[151 Sous espaces stables]] parler de supplémentaires stables et mettre ça en illustration

Référence : Oraux X ens algèbre 3

Déroulé du développement

Montrer que les réflexions engendrent $O(E)$

On va faire une récurrence sur $r = \text{rg}(u - \text{id})$

$$r = 0$$

On a alors $u = \text{id}$ donc c'est bon

Introduire une réflexion bien sentie s

Soit $r \geq 1$, on suppose le résultat vérifié pour tout rang $< r$
 $u \neq \text{id}$ donc on a un vecteur e de norme 1 tel que $u(e) \neq e$

u est une isométrie, donc $\|u(e)\| = \|e\|$, donc $u(e) - e \perp u(e) + e$ (c'est Pythagore)

On considère donc la réflexion s selon $u(e) - e$, elle vérifie

$$\begin{cases} s(u(e) + e) = u(e) + e \\ s(u(e) - e) = e - u(e) \end{cases}$$

donc comme $2 \neq 0$, s échange e et $u(e)$

$$\begin{cases} s(u(e)) = e \\ s(e) = u(e) \end{cases}$$

Montrer que $\ker(u - \text{id}) \subsetneq \ker(su - \text{id})$ et appliquer l'hypothèse de récurrence

Soit $x \in \ker(u - \text{id})$, on a $u(x) = x$, donc il suffit de montrer que $s(x) = x$, donc que x est orthogonal à $u(e) - e$

$$\langle x, u(e) - e \rangle = \langle x, u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = 0$$

Et $s(u(e)) = e$ avec $u(e) \neq e$ donc l'inclusion est stricte

Donc $\text{rg}(su - \text{id}) < \text{rg}(u - \text{id})$

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à su , on a

$$su = s_1 \cdots s_p$$

avec $p \leq \text{rg}(su - \text{id}) < \text{rg}(u - \text{id})$

Donc

$$u = ss_1 \cdots s_p$$

est le produit de $p + 1 \leq \text{rg}(u - \text{id})$ réflexions

remarque : $\text{rg}(u - \text{id})$ est en fait le nombre minimal de réflexions nécessaires

En effet si $u = s_1 \cdots s_p$, et si H_i est l'hyperplan fixe par s_i , alors si x est dans l'intersection de tous les H_i , x est fixe par u , ce qui donne

$$H_1 \cap \cdots \cap H_p \subseteq \ker(u - \text{id})$$

Donc on a

$$\dim(E) - p \leq \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \leq \dim(E) - \operatorname{rg}(u - \operatorname{id})$$

Donc on a bien $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) \geq p$

Montrer que les renversements engendrent $\operatorname{SO}(E)$

Traiter le cas $n = 3$

Si $u = \operatorname{id}$ c'est bon

Sinon u est une rotation, donc de $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) = 2$, donc le résultat précédent donne que $u = s_1 s_2$ est le produit de deux réflexions

Donc comme on est en dimension 3, $-s_1$ et $-s_2$ sont des renversements

Donc $u = (-s_1)(-s_2)$ est bien le produit de deux renversements

Traiter le cas général en se ramenant au cas $n = 3$

Soit $u \in \operatorname{SO}(E)$

Le résultat précédent donne que u est le produit d'un nombre pair de réflexions, donc il suffit de montrer que pour deux réflexions s_1, s_2 il existe deux renversements σ_1, σ_2 tels que $s_1 s_2 = \sigma_1 \sigma_2$

Soit H_1, H_2 les hyperplans fixes par s_1 et s_2 et F un sev de $H_1 \cap H_2$ de dimension $n - 3$
 F est un sous espace stable par u , donc $F^\perp$ est un sous espace stable de dimension 3

Donc sur $F^\perp$ on a $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ tels que $s_1|_{F^\perp} s_2|_{F^\perp} = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2$, donc en les prolongeant à E par l'identité sur F , on obtient deux renversements σ_1, σ_2 tels que $s_1 s_2 = \sigma_1 \sigma_2$

Détail de certains points

Montrer que si $\|x\| = \|y\|$ alors $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux

On a

$$\|(x + y) + (x - y)\|^2 = 4\|x\|^2$$

et

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4\|x\|^2$$

Donc par Pythagore, $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux

Version révisions

Soit E un espace euclidien de dimension n

On se propose de montrer que

1. $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Mieux : tout $u \in O(E)$ est le produit d'au plus r réflexions orthogonales où $r = \text{rg}(u - \text{id})$
2. $SO(E)$ est engendré par les renversements

On va faire une récurrence sur r . $r = 0$ est clair, supposons $r \geq 1$

1. Justifier qu'il existe un vecteur e de norme 1 tel que $u(e) \neq e$
2. Justifier que $u(e) - e \perp u(e) + e$

On considère donc la réflexion s selon $u(e) - e$

3. Soit $x \in \ker(u - \text{id})$, montrer que $x \perp u(e) - e$
4. En déduire que $\ker(u - \text{id}) \subsetneq \ker(su - \text{id})$
5. Appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire l'item 1.
6. Montrer qu'en fait si u est le produit de p réflexions, on a $\text{rg}(u - \text{id}) \geq p$

On a fait les réflexions, faisons les renversements

7. Montrer que ça marche pour $n = 3$ en utilisant les réflexions
8. Montrer que si s_1, s_2 sont deux réflexions, alors $s_1 s_2$ est le produit de deux renversements en se ramenant au cas $n = 3$
9. En déduire l'item 2.