Formes normales de Smith

CloudSea

Cadre

Soit A un anneau euclidien et δ son stasthme
Pour toute matrice $M \in M_{n,m}(A)$, on montre que M est équivalente à une matrice $D \in M_{n,m}(A)$ de la forme $D = \text{Diag}(f_1, \cdots, f_r, 0, \cdots, 0)$ où pour tout i, f_i divise f_{i+1}
D est unique modulo l'action de $A^\times$ sur les coefficients

Recasages :
- [[122 Anneaux principaux]]
- [[142 PGCD et PPCM]]
- [[149 Déterminant]]
- [[152 Diagonalisation]]

Référence : 131 DEV

Déroulé du développement

Montrer l'existence

On suppose que $M \neq 0$ sinon c'est évident
Soit U une matrice équivalente à M contenant un coefficient de stasthme minimal parmi les coefficients non nuls des matrices équivalentes à M
Quitte à permuter deux lignes et deux colonnes, on suppose que ce coefficient f_1 est en position $1, 1$

Pour $2 \leq i \leq n$, la division euclidienne donne q_i, r_i tels que $u_{i,1} = f_1 q_i + r_i$
En effectuant les transvections $L_i \leftarrow L_i - q_i L_1$, on obtient une matrice équivalente à M dont la première colonne est

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Or par minimalité du stasthme de f_1, on a $r_2 = \cdots = r_n = 0$

On applique le même procédé aux $u_{1,j}$ et aux C_j pour $2 \leq j \leq p$ pour obtenir une matrice équivalente à M de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Notons $v_{i,j}$ les coefficients représentés parles étoiles, reste à montrer que f_1 divise tous les $v_{i,j}$ et faire une récurrence

Soient $2 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq m$, montrons que f_1 divise $v_{i,j}$
Une division euclidienne donne $v_{i,j} = f_1 q + r$
Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ puis $C_j \leftarrow C_j - qC_1$ donnent une matrice équivalente à M avec r en position $1, j$. Donc par minimalité de f_1, on a $r = 0$, donc f_1 divise bien $v_{i,j}$

Donc en ré itérant le processus sur $V = (v_{i,j})$ jusqu'à obtenir n ou $p = 0$, ou une sous matrice nulle, on obtient une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(f_1, \cdots, f_r, 0, \cdots, 0)$ équivalente à M

Et par construction f_1 divise les coefficients de V, donc comment les opérations sont des combinaisons arithmétique, f_1 divise tous les coefficients de toute matrice équivalente à V
Donc par récurrence immédiate, $f_1 | f_2 | \cdots | f_r$

Montrer l'unicité

Soit $k \leq n, m$, notons $I_k(M)$ l'idéal engendré par les mineurs de taille k de M
Montrons que $I_k(M)$ est un invariant
Soit $P \in \mathrm{GL}_n(A)$, en notant $M = (C_1 | \cdots | C_m)$, on a

$$MP = \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,1} C_1 | \cdots | \sum_{i=1}^{n} p_{i,m} C_m \right)$$

Donc par n-linéarité du déterminant, on obtient que les k-mineurs de MP sont des com-

binaisons linéaires des mineurs de M
Par suite, on montre de la même manière que les k-mineurs de QMP sont combinaisons linéaires des mineurs de M
Donc on a l'inclusion $I_k(QMP) \subseteq I_k(M)$, et en appliquant le même résultat à $Q^{-1}QMPP^{-1}$ on obtient l'inclusion réciproque

Soient $D = \text{Diag}(f_1, \cdots, f_r, 0, \cdots, 0)$ et $\Delta = \text{Diag}(g_1, \cdots, g_r, 0, \cdots, 0)$ deux matrices de Smith équivalentes
On a

$$I_k(D) = \begin{cases} \langle f_1 \cdots f_k \rangle & \text{si } k \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et même chose avec Δ et les g_i

On en déduit qu'il existe des inversibles $u_1, \cdots u_r$ tels que pour tout $k \leq r$

$$f_1 \cdots f_k = u_k g_1 \cdots g_k$$

On en déduit que f_1 et g_1 sont associés, puis que f_2 et g_2 sont associés etc ... Et par récurrence immédiate f_k et g_k sont associés pour tout $k \leq r$

Version révisions

Soit A un anneau euclidien et δ son stasthme
On se propose de montrer que toute matrice $M \in M_{n,m}(A)$, est équivalente à une matrice $D \in M_{n,m}(A)$ de la forme $D = \text{Diag}(f_1, \cdots, f_r, 0, \cdots, 0)$ où pour tout i, f_i divise f_{i+1}
D est unique modulo l'action de $A^\times$ sur les coefficients

On suppose que $M \neq 0$ sinon c'est évident
Soit f_1 le coefficient non nul de plus petit stasthme parmi tous ceux des matrices équivalentes à M
Montrons l'existence de D

1. Montrer que M est équivalente à une matrice diagonale par blocs $\text{Diag}(f_1, *)$
2. Soit $v_{i,j}$ un élément de $*$ et $v_{i,j} = f_1 q + r$ sa division euclidienne. Montrer que que M est équivalente à une matrice avec r comme coefficient et en déduire que $r = 0$
3. En déduire l'existence de D par récurrence

Montrons l'unicité
Soit $k \leq n, m$, notons $I_k(M)$ l'idéal engendré par les mineurs de taille k de M

4. Montrer que les k-mineurs de M sont des combinaisons linéaires de ceux de PMQ
5. En déduire que $I_k(M) = I_k(PMQ)$
6. En déduire que deux matrices de Smith équivalentes sont égales modulo l'action de $A^{\times}$