

Exponentielle de matrices de S_n dans S_n^{++}

CloudSea

Cadre

On montre que $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Recasages :

- [[152 Diagonalisation]]
- [[155 Exponentielle de matrices]]
- [[157 Matrices hermitiennes]]
- [[158 Endomorphismes d'un espace euclidien]]

Référence : NH2G2 tome 1 p 357

Déroulé du développement

Montrer que $\exp$ est bien définie et continue

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, par théorème spectral on a $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^tPDP$

On a alors

$$\exp(S) = {}^tP \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Donc $\exp$ est bien définie de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, et comme $\exp$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ sa restriction est encore continue

Montrer l'injectivité

Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $\exp(A) = \exp(B)$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1, \dots, \mu_n$ celles de B

Soit L le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [1, n], L(e^{\mu_i}) = \mu_i$ de sorte

que $L(\exp(B)) = B$

A commute avec $\exp(A)$, donc avec $\exp(B)$, Donc A commute avec $L(\exp(B))$ donc avec B . Donc A et B se diagonalisent simultanément, donc on a $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ et $B = P \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^{-1}$

Donc comme on a $\exp(A) = \exp(B)$, on a $\text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = \text{Diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})$, donc par injectivité de l'exponentielle réelle on a $\forall i \in [1, n] \lambda_i = \mu_i$, donc $A = B$

Montrer la surjectivité

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, par théorème spectral on a $D = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t P D P$ où les μ_i sont strictement positifs

Soit $A = {}^t P \text{Diag}(\log(\mu_1), \dots, \log(\mu_n)) P$, A est bien symétrique et on a $\exp(A) = B$, donc $\exp$ est bien surjective

Montrer la continuité de la réciproque

Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit (A_p) la suite des images réciproques des B_p et A l'image réciproque de B , montrons que $A_p \rightarrow A$

(B_p) converge donc est bornée pour $\|\cdot\|_2$. Or les B_p sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc vérifient $\|M\|_2 = \rho(M)$, donc on a $C > 0$ tels que pour tout p , $\|B_p\|_2 \leq C$, donc pour tout p , $\text{sp}(B_p) \leq C$. En appliquant le même raisonnement à la suite des B_p^{-1} , on obtient une constante $C' > 0$ telle que pour tout p , $\text{sp}(B_p) \in [C', C]$. Donc comme les valeurs propres des A_p sont les logarithmes de celles des B_p , on a pour tout p , $\text{sp}(A_p) \in [\log(C'), \log(C)]$, donc (A_p) est bornée

Soit A' une valeur d'adhérence de (A_p) , A' est donc limite d'une suite extraite $(A_{\varphi(p)})$, donc on a $\exp(A_{\varphi(p)}) = B_{\varphi(p)} \rightarrow B$, donc par continuité de l'exponentielle on a $\exp(A') = B = \exp(A)$, donc par injectivité on a $A' = A$

Donc (A_p) est une suite bornée d'un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie qui admet une unique valeur d'adhérence, donc (A_p) converge vers cette valeur d'adhérence, donc converge vers A

Détail de certains points

Montrer que si $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\exp(P D P^{-1}) = P \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^N \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^N \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = P \text{Diag} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) P^{-1}$$

Et un passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ donne bien le résultat attendu

C'est quoi le polynôme interpolateur de Lagrange ?

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, le polynôme interpolateur de Lagrange est un polynôme de degré $< n$ tel que pour tout i , $L(a_i) = b_i$

On définit le polynôme $L = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. L est une somme de polynômes de degré $< n$ donc est un polynôme de degré $< n$. Et on vérifie sans peine que $L(a_i) = b_i$ pour tout i

Montrer que si $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ commutent, alors elles se diagonalisent simultanément

On va le faire en version endomorphisme : Soient u et v deux endomorphismes de E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n qui commutent, montrons qu'il existe une base qui diagonalise u et v

Rappel : Comme u et v commutent, les sous espaces propres de u sont stables par v et vice versa

On fait ça par récurrence sur n

$n = 1$ ok

$n \rightarrow n + 1$

Si u est une homothétie, n'importe quelle base qui diagonalise v (et qui existe par th spectral) convient

Sinon les sous espaces propres de u sont de dimension $\neq n$, et ils sont stables par v

Pour tout sous espace propre E_λ de u , par hypothèse de récurrence appliquée aux induits par u et v sur E_λ , on a une base de E_λ qui diagonalise u et v

En concaténant toutes ces bases, on obtient une base de E (car les E_λ sont supplémentaires par th spectral toujours lui) et elle diagonalise u et v

En supposant les bases de E_λ orthonormées on peut même construire une base orthonormée

Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\|A\| = \rho(A)$

Soit u l'endomorphisme associé à A et $(e_1, \dots, e_n)$ une bon qui diagonalise u et $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \rho(u)$ les valeurs propres associées

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de norme 1, on a $\|u(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i \lambda_i e_i\|^2$ par Pythagore

Donc $\|u(x)\|^2 \leq \rho(u)^2 \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|^2 = \rho(u)^2 \|x\|^2 = \rho(u)^2$, donc $\|u(x)\| \leq \rho(u)$, donc $\|u\| \leq \rho(u)$

Et on a $\|u(e_n)\| = \|\lambda_n e_n\| = \rho(u)$, donc on a bien $\|u\| = \rho(u)$

Soit (x_n) une suite bornée d'un compact K , montrer que si (x_n) admet une unique valeur d'adhérence x alors (x_n) converge vers x

Si (x_n) ne converge pas vers x , alors (x_n) admet une infinité de termes en dehors de $B(x, 1)$, donc (x_n) admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ à valeurs dans $K \setminus B(x, 1)$. $(x_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans K donc admet une valeur d'adhérence y

Par construction de $(x_{\varphi(n)})$, on a $y \neq x$, donc y est une valeur d'adhérence de (x_n) différente de x , absurde

Version révisions

On montre que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

1. A l'aide d'un théorème spectral, montrer que $\exp$ est bien définie et continue
2. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. A l'aide d'un polynôme bien senti, montrer que A et B commutent et en déduire que $A = B$
3. Toujours à l'aide d'un théorème spectral, montrer la surjectivité
4. Soit (B_p) une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers B et (A_p) la suite des antécédents
 - 4.1 Montrer qu'il existe $0 < m \leq M$ tels que $\text{sp}(B_p) \subseteq [m, M]$ pour tout p
 - 4.2 En déduire que (A_p) est bornée
 - 4.3 Montrer que (A_p) admet une unique valeur d'adhérence
 - 4.4 En déduire que (A_p) converge vers l'antécédent de B
 - 4.5 En déduire la continuité de la réciproque