

Densité des matrices diagonalisables

CloudSea

Cadre

Soit $D_n(\mathbb{R})$ les matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et $T_n(\mathbb{R})$ celles trigonalisables
On montre que $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

Recasages :

- [[150 Réduction d'endomorphismes]]
- [[152 Diagonalisation]]
- [[156 Trigonalisation et nilpotence]]

Référence : CVA

Déroulé du développement

Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$

$\Leftarrow$ Soit z une racine de P , on a $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)| = 0$ donc $\operatorname{Im}(z) = 0$ donc z est réel
Donc les racines de P sont réelles, donc P est scindé sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ P est scindé sur $\mathbb{R}$ donc on peut écrire

$$P(z) = \prod_{k=1}^n (z - x_k)$$

où les x_k sont réels

Donc pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$|z - x_k|^2 = (\operatorname{Re}(z) - x_k)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \geq \operatorname{Im}(z)^2$$

Donc $|P(z)|^2 \geq \operatorname{Im}(z)^{2n}$, ce qui donne bien l'inégalité voulue

En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ est fermé

Soit (A_m) une suite de matrices trigonalisables qui converge vers une matrice A

L'application $A \mapsto \chi_A$ est continue, donc $\chi_{A_m} \rightarrow \chi_A$

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a donc $\chi_{A_m}(z) \rightarrow \chi_A(z)$, donc par conservation des inégalités larges, on a $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$

Donc χ_A est scindé, donc A est trigonalisable

Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans les trigonalisables

Soit A une matrice trigonalisable et P inversible telle que $T = PAP^{-1}$ soit triangulaire

Montrer que T est limite d'une suite de matrices diagonalisables

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de T qui sont donc sur la diagonale

Pour $\varepsilon > 0$, et $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mu_1, \dots, \mu_n$ où $\mu_i = \lambda_i + \frac{\varepsilon}{im}$

Montrons qu'il existe un ε tel que les μ_i sont 2 à 2 distincts pour tout m

Si les λ_i sont tous égaux, n'importe quel $\varepsilon > 0$ convient

Sinon soit $0 < \varepsilon < \inf_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$ et $i \neq j$, si $\lambda_i = \lambda_j$ on est ramené au cas précédent

Sinon on a

$$|\mu_i - \mu_j| = \left| \lambda_i + \frac{\varepsilon}{im} - \lambda_j - \frac{\varepsilon}{jm} \right| \geq \left| |\lambda_i - \lambda_j| - \frac{\varepsilon}{m} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| \right|$$

Or $\left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| \leq 1$ donc $\frac{\varepsilon}{m} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| \leq \varepsilon < |\lambda_i - \lambda_j|$ donc le bordel à droite est strictement supérieur à 0 (à l'oral faut faire tout ça en soulignant des trucs)

Soit donc un ε convenable et pour tout m la matrice $D_m = T + \operatorname{Diag} \left(\frac{\varepsilon}{m}, \dots, \frac{\varepsilon}{nm} \right)$

Les valeurs propres de D_m sont les μ_i qui sont donc distinctes, donc D_m est diagonalisable

Et il est clair que $D_m \rightarrow T$, donc T est bien limite d'une suite de matrices diagonalisables

Conclure

On a donc $D_m \rightarrow T$, donc $P^{-1}D_mT \rightarrow A$, donc les matrices diagonalisables sont bien denses dans les trigonalisables

Donc comme $T_n(\mathbb{R})$ est fermé, on a $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

Version révisions

Soit $D_n(\mathbb{R})$ les matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et $T_n(\mathbb{R})$ celles trigonalisables

On se propose de montrer que $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

On va faire un premier résultat intermédiaire : $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$

1. Montrer le sens $\Leftarrow$
2. On suppose que les racines de P sont réelles, notons les $x_1, \dots, x_n$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z - x_i|^2 \leq \operatorname{Im}(z)^2$
3. En déduire le sens $\Rightarrow$
4. Déduire de ce résultat que $T_n(\mathbb{R})$ est fermé, et que donc $\overline{D_n(\mathbb{R})} \subseteq T_n(\mathbb{R})$

Soit A une matrice trigonalisable et $A = PTP^{-1}$ une trigonalisation de A

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et pour tout k , $\mu_k = \lambda_k + \frac{\varepsilon}{km}$ où $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$

4. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que les μ_k sont 2à2 distincts pour tout m
5. En déduire une suite de matrices diagonalisables (D_m) qui tend vers T
6. En déduire que $D_n(\mathbb{R})$ est dense dans $T_n(\mathbb{R})$, et que donc $\overline{D_n(\mathbb{R})} \supseteq T_n(\mathbb{R})$