Calcul de zeta(2k)

CloudSea

Cadre

On montre que $\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\dfrac{b_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$

Recasages :
- [[230 Séries numériques]]
- [[243 Séries entières]]
- [[244 Fonctions usuelles]]
- [[246 Séries de Fourier]]
Backup :
- [[209 Approximations de fonctions]] a mettre au moment de parler des séries de Fourier, mais pas faire un dev
- [[235 Interversions de symboles]] a mettre pour illustrer Fubini

Références : Oraux X ens analyse 2

Déroulé du développement

Faire le DSF de φ et donner une expression de $f(z)$ pour $z \neq 2ni\pi$

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc on peut calculer ses coefficients de Fourier

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\ e^{-inx}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}}\ e^{-inx}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - ni}\left[e^{\frac{zx}{2\pi}}\ e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{z - 2ni\pi}(-1)^n\left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Le théorème de Dirichlet appliqué à $x = \pi$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}\right) &= \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{in\pi}}{z - 2ni\pi} \\
&= \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2ni\pi} \\
&= \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z + 2ni\pi}{z^2 + 4\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2\left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Le membre de gauche donne

$$\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2\left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)} = \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)} = \frac{e^z - 1 + 2}{2(e^z - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1}$$

Et donc en multipliant par z et en soustrayant ce qu'il faut on obtient

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

En déduire un DSE de f

Pour $|z| < 2\pi$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} &= \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\ \frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}} \\
&= \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{z}{2\pi n}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

En sommant sur k puis sur n on voit que la série des $(-1)^{k-1}\left(\frac{z}{2\pi n}\right)^{2k}$ est sommable, donc par Fubini on a pour $|z| < 2\pi$ et $z \neq 0$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{z}{2\pi n}\right)^{2k} \\
&= 1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}z^{2k} \\
&= 1-\frac{z}{2}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)z^{2k}
\end{aligned}
$$

En étudiant le prolongement par continuité de f en 0 on remarque que la formule fonctionne en fait pour $|z| < 2\pi$

En déduire une expression de $\zeta(2k)$

Les nombres de Bernouilli sont les b_k tels que $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_k}{k!}z^k$

On a montré que $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$ et que pour $k \geq 1$ $b_{2k+1} = 0$

On a

$$
\begin{aligned}
z &= f(z)(e^z - 1) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k\right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\right) z^n
\end{aligned}
$$

Donc l'unicité du DSE donne pour $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 0$$

On en déduit par récurrence immédiate que les b_k sont rationnels

Et l'unicité du DSE donne aussi pour $k \geq 1$

$$\frac{1}{2} \frac{b_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

Donc

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{b_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$$

Et à partir de la formule de récurrence des b_k on en déduit $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ... etc on peut continuer

Version révisions

Soit b_k les nombres de Bernouilli, c'est à dire les entiers b_k qui donnent le développement en série entière en 0 de la fonction suivante

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k$$

On se propose de montrer que

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{b_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$$

Soit $z \neq 2ni\pi$, on se donne φ la fonction 2π-périodique qui vaut $\exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)$ sur $]-\pi,\pi]$

1. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(\varphi)$
2. Appliquer le théorème de Dirichlet en π
3. En déduire que

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$$

4. Écrire $\dfrac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$ comme une série entière
5. À l'aide d'un théorème de Fubini, en déduire un développement en série entière de f qui fait intervenir les $\zeta(2k)$
6. En déduire la formule de $\zeta(2k)$ annoncée
7. En faisant des séries entières sur l'égalité $z = f(z)(e^z-1)$ montrer que les b_{2k} sont rationnels