

Base hilbertienne de polynômes orthogonaux

CloudSea

Cadre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids de I dans $\mathbb{R}_+^*$

On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, dx < +\infty$

On montre que les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

Recasages :

- [[201 Espaces de fonctions]]
- [[209 Approximations de fonctions]]
- [[213 Espaces de Hilbert]]
- [[234 Intégrale de Lebesgue]]
- [[235 Interversions de symboles]]
- [[239 Intégrales à paramètre]]
- [[245 Analyse complexe]]
- [[250 Transformée de Fourier]]

Backup :

- [[208 Espaces vectoriels normés]] a mettre dans le plan, mais on peut pas faire deux dev sur les hilbertiens, et projection sur convexe fermé illustre mieux la norme

Références : Objectif agreg

Déroulé du développement

Montrer que les $x \mapsto x^n$ sont dans $L^2(I, \rho)$

On a

$$\int_I |x^n|^2 \rho(x) \, dx = \int_I |x|^{2n} \rho(x) \, dx < +\infty$$

car $|x|^{2n} = o(e^{a|x|})$ en $\pm\infty$ et est continue

Donc les $x \mapsto x^n$ sont bien dans L^2

Soit $f \in L^2(I, \rho)$, montrer que $\varphi = f\rho\chi_I$ est dans $L^1(\mathbb{R})$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \, dx = \int_I |f(x)|\rho(x) \, dx \leq \int_I \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x) \, dx = \frac{1}{2}(\|1\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) < +\infty$$

Donc φ est bien dans L^1

Montrer que $\widehat{\varphi}$ admet un prolongement holomorphe sur $B_a = \{|\operatorname{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$ et calculer ses dérivées

Soit $g(z, x) = e^{-izx}f(x)\rho(x)$ de sorte que $\widehat{\varphi}(\omega) = \int_I g(\omega, x) \, dx$

Pour $z \in B_a$, on a

$$\int_I |g(z, x)| \, dx \leq \int_I e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x) \, dx$$

Donc par Cauchy Schwarz, on obtient

$$\int_I |g(z, x)| \, dx \leq \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x) \, dx \right)^{1/2} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x) \, dx \right)^{1/2} < +\infty$$

Donc on peut définir pour $z \in B_a$

$$F(z) = \int_I g(z, x) \, dx$$

Reste à montrer que F est bien holomorphe

On a vu que à z fixé, $g(z, \cdot)$ est intégrable

Soit $x \in I$, $g(\cdot, x)$ est holomorphe

Et pour $z \in B_a$ on a

$$|g(z, x)| \leq e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x)$$

Dont on a vu qu'elle est intégrable indépendante de z , donc on peut appliquer le th d'holomorphie sous l'intégrale. F est holomorphe et mieux :

$$F^{(n)}(z) = \int_I (-ix)^n e^{-izx} f(x)\rho(x) \, dx$$

Soit $g_n(x) = x^n$, montrer que si $f \perp g_n \forall n$ alors $f = 0$ dans $L^2(I, \rho)$ et conclure

La dérivée de F en 0 donne

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x) \, dx = (-i)^n \langle f, g_n \rangle$$

Donc si $f \perp g_n$ pour tout n , alors $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout n

Donc par unicité du DSE, F est nulle au voisinage de 0, donc par théorème du prolongement analytique elle est nulle tout court

Donc en particulier $\widehat{\varphi}$ est nulle, donc par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1 $\varphi = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$

Donc comme $\rho > 0$ on a $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$, donc dans $L^2(\mathbb{R})$

Donc $\text{Vect}(g_n)_{n \in \mathbb{N}}^\perp = \{0\}$, donc les g_n sont bien dense

Donc la famille obtenue par Gram Schmidt sur les g_n donne une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

Version révisions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, dx < +\infty$$

On se propose de montrer que les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $H = L^2(I, \rho)$ pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) \, dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $g_n(x) = x^n$

1. On considère $f \in H$, montrer que $\varphi = f\rho\chi_I$ est dans $L^1(\mathbb{R})$

On peut donc considérer la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de φ

2. Soit $B_a = \{|\operatorname{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$. A l'aide d'une inégalité de Cauchy Schwarz, montrer que φ admet un prolongement holomorphe F sur B_a
3. Exprimer $F^{(n)}(0)$ en fonction de $\langle f, g_n \rangle$
4. Montrer que si f est orthogonale à tous les g_n alors $f = 0$ (attention on parle dans L^2 !)
5. Conclure