

Source: 131 dup, Lesesne
Caldes - Germain, tome 1

exponentielle $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un
homéomorphisme

Preuve:

* Bien définie: Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, par le théorème spectral
il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telles que
 $A = PDP^T$.

On a $\exp(A) = P \exp(D) P^T = P \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}) P^T$
 $\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

* Surjectivité: Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Le théorème spectral
donne $A = PDP^T$, $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i > 0$.
Posons $D' = \text{diag}(\ln d_1, \dots, \ln d_n)$ et $\Pi = PD'P^T$.
Alors $A = \exp(\Pi)$.

* Injectivité: Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que
 $\exp(A) = \exp(B) = H$.

Par l'unicité de la racine carrée sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\exp(A/2) = \exp(B/2)$$

$$\text{Par récurrence, } \exp(2^{-k}A) = \exp(2^{-k}B)$$

Comme $\exp$ est différentiable en 0 de différentielle id,

$$\begin{aligned} 2^{-k}A + o(2^{-k}A) &= \exp(2^{-k}A) - I_n \\ &= \exp(2^{-k}B) - I_n \\ &= 2^{-k}B + o(2^{-k}B) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } A + o(I) = B + o(I)$$

$$\text{d'où } A = B.$$

Remq: Il me
semble que Caldes
utilise ici une
diagonalisation
simultanée,
l'argument
ici est plus
élémentaire.

* Continuité de $\exp^{-1} = \phi^{-1}$
 Soit $(A_k)_k$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
 Notons $A_k = \exp(S_k)$ et $A = \exp(S)$ $S, S_k \in S_n(\mathbb{R})$

On considère la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

On a $A_k \rightarrow A$ donc $(A_k)_k$ est borné
 $A_k^{-1} \rightarrow A^{-1}$ donc $(A_k^{-1})_k$ est borné.

Or si $\lambda \in S_n(\mathbb{R})$, $\|\lambda\| = \rho(\lambda)$

si $\lambda \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|\lambda\| = \max(|\lambda_j|)$.

Donc les spectres des A_k sont majorés par un C.S.O.,
 et en appliquant le même raisonnement à A_k^{-1} , ils
 sont minorés par un $c' > 0$.

Les vp des $(A_k)_k$ sont dans $[c', C]$ donc les
 vp des S_k sont dans $(\ln c', \ln C)$, d'où
 $\|S_k\| \leq \max(|\ln C|, |\ln c'|)$ et $(S_k)_k$ est borné.

Montrons que sur la seule valeur d'adhérence de S_k :
 Si $S_{\phi(k)} \rightarrow S'$, $\exp S_{\phi(k)} \rightarrow \exp(S')$
 $A_{\phi(k)} \rightarrow \exp(S') = \exp(S)$
 d'où $S = S'$ par injectivité.

$(S_k)_k \in B(0, \max(|\ln C|, |\ln c'|))$ compact et a une
 unique valeur d'adhérence S , d'où $(S_k)_k \rightarrow S$.

Lemme: Si $\lambda \in S_n(\mathbb{R})$, $\|\lambda\| = \rho(\lambda)$

Preuve: Par le thm spectral, $\lambda = P D P^{-1}$, $P \in O(n)$, $D = \text{diag}(\lambda_j)$.
 $\|P D P^{-1} x\|_2 \leq \|P\| \|D\| \|P^{-1} x\|_2 = \|D\| \|x\|_2$ car $\|x\|_2 = \|P x\|_2$ b.j.
 et $\|P\| = 1$ isométrie.

$$\frac{\|D x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \frac{\lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \max |\lambda_j|^2 = \rho(\lambda)^2, \text{ atteint en}$$

$$x = (0, \dots, 1, \dots, 0) \text{ où } |\lambda_i| = \max |\lambda_j|$$