

# Développement asymptotique de la série Harmonique

\* Prop:  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$

① On a  $\frac{1}{n} \sim \log(1 + \frac{1}{n})$  (DL de  $\log$ )  
et  $\sum \log(1 + \frac{1}{n})$  diverge, donc les sommes partielles  
sont équivalentes:

$$H_n \sim \sum_{k=1}^n \log(1 + \frac{1}{k}) = \sum \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1) \sim \log(n).$$

② On calcule:  $U_n = H_n - \log(n)$   
 $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \log(n) + \log(n-1) = \frac{1}{n} + \log(1 - \frac{1}{n})$   
 $= \frac{1}{n} + (-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{2n^2}$

De plus, comme  $\log(1+x) \sim x$ ,  $x \geq \log(1+x)$   
donc  $U_n \leq 0$ . Les suites sont négatives donc  
comme  $\sum \frac{1}{2n^2} < \infty$ ,  $\sum (U_n - U_{n-1}) < \infty$ .

On a  $U_n - U_1 = \sum_{k=2}^n (U_k - U_{k-1})$  donc  $U_n < \infty$ .  
Notons  $\gamma$  sa limite.  
Alors  $H_n = \log n + U_n = \log n + \gamma + o(1)$ .

③ On a, comme  $U_n - U_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$ ,  
 $\sum_{k=n+1}^{\infty} (U_k - U_{k-1}) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

On veut donc un équivalent de  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2} dt$$

donc  $\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{m}$$

$$\text{d'où } \gamma - U_n = \sum_{k=m}^{+\infty} (V_k - V_{k-1}) \sim -\frac{1}{2m}$$

$$U_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{d'où } H_n = \log n + U_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

① On peut continuer :  $V_n = H_n - \log n - \gamma - \frac{1}{2n}$

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{n+2}{6n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3} \end{aligned}$$

Donc  $\sum (V_k - V_{k-1})$  converge.

Comme  $V_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$

$$V_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} (V_k - V_{k-1}) \sim -\frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Or  $k \geq 2$ ,  $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$

Donc  $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$

D'où  $V_n \sim -\frac{1}{12n^2}$

et  $H_n = V_n + \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n}$

$$H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$