SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE

Théorème : Soient $b>0$, et $f : [0,b] \to \mathbb{R}$. On suppose f continue, croissante et tq.

(i) $\forall x \in]0,b]$, $f(x) < x$ et $f(0)=0$.

(ii) $\exists \lambda >0, \exists r>1$ tq. en 0, $f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$.

Alors, $\forall c \in]0,b[$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ de premier terme $u_0 = c$ converge vers 0 et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n\lambda(r-1))^{1/1-r}.$$

Preuve :

(1) Mq. $(u_n)_n$ est bien définie : on a $f(0)=0$ et $\forall x \in]0,b]$, $0 \leq f(x) < x \leq b$. Donc $f(x) \in [0,b]$ donc, on a bien que $(u_n)_n$ est définie et positive.

(2) Mq. $u_n \longrightarrow 0$. $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ car $u_n \in [0,b]$. Donc, $(u_n)_n$ est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ converge, vers un réel noté $l \in \mathbb{R}$. Or, f est continue, donc $f(l) = l$ et par hypothèse, on trouve $l = 0$.

(3) On cherche l'équivalent.

On a $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = -\lambda u_n^r + o(u_n^r)$ car $u_{n+1} = f(u_n)$. Mq. $(u_n)_n$ ne s'annule pas si $u_0 \neq 0$.

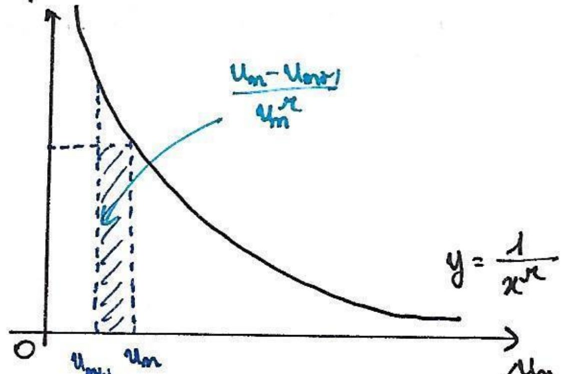
⌈Supposons par l'absurde que $(u_n)_n$ s'annule en $n_0 \geq 1$, et que n_0 est le plus petit entier en lequel la suite s'annule. Alors par (i), on a $\forall x \in [0, u_{n_0-1}]$, $0 \leq f(x) < f(u_{n_0-1}) = u_{n_0} = 0$. ~~[illegible]~~

Donc sur $[0, u_{n_0-1}]$, f est nulle ce qui contredit le DL de f. En effet, (ii) donne que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 1$, ce qui n'est pas si f est nulle sur $[0, u_{n_0-1}]$.⌋

Comme $(u_n)_n$ ne s'annule pas, on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} = -\lambda + o(1) \qquad (*)$$

On essaie de construire l'équivalent :



Comme $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$, on peut espérer que $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^r}\,dt = \frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r}$

Ce qui donnerait par $(*)$, attention aux signes :

$$u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} \sim \lambda(r-1).$$

On le vérifie :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} &= f(u_n)^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= \left(u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)\right)^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r}\left(1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)^{1-r} - u_n^{1-r} \\ &= u_n^{1-r}\left(1 - \lambda(1-r) u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right) - u_n^{1-r} \\ &= \lambda(r-1) + o(1). \end{aligned}$$

...

Ce qui correspond bien au résultat attendu. On a $(r-1)\lambda > 0$ et $u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} > 0$ et la série $\sum_{n\geq 0} (r-1)\lambda$ diverge. Donc par les thm de sommation des équivalence, et somme télescopique, il vient :

$$u_n^{1-r} - u_0^{1-r} \sim \sum_{k=0}^{n-1} (r-1)\lambda = n\lambda(r-1)$$

Or, comme $r>1$, $u_n^{1-r} - u_0^{1-r} \sim u_n^{1-r}$. D'où, $u_n^{1-r} \sim \lambda n(r-1)$, donc,

$$u_n \sim (n\lambda(r-1))^{1/1-r}.$$

Application : on prend $f : x \in [0,b] \mapsto \ln(1+x)$. f vérifie les hypothèses avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $r=2$, ce qui donne pour la suite associée :

$$u_n \sim \frac{2}{n} \quad \text{si } u_0 \neq 0.$$

Remarques :

▷ Développement peu intéressant, mais qui rentre dans la leçon 224 sur les dvlpt asymptotique.

▷ Il est d'usage d'aller plus loin dans l'application, et de pousser le dvlpt asymptotique à l'ordre supérieur. Pour moi qui voulait expliquer convenablement les choses, je n'y suis jamais arrivé.

▷ Les hypothèses sont nombreuses dans l'énoncé. C'est pourquoi je commençais mon exposé en balançant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ pour mq. une telle fonction existe, et pour bien fixer les hypothèses dans l'esprit de mes auditeurs.