RÉCIPROQUE DE LA FORMULE DE TAYLOR

Théorème : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des applications continues $a_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$ tq., en posant $\forall x, x+h \in I$

$$R_n(x,h) = f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x) h^k}{k!},$$

on ait :

$$\forall a \in I, \lim_{(x,h)\to(a,0)} \frac{R_n(x,h)}{\|h\|^n} = 0$$

Alors, $f \in C^n(I)$ et $a_k = f^{(k)}$.

Preuve :

* **Cas $n=2$.** Les hypothèses donnent que $\forall x, x+h \in I$, $f(x+h) = a_0(x) + o(1)$ et $f(x+h) = a_0(x) + a_1(x) + o(x)$. Donc, $f \in C^1(I)$, et $f(x) = a_0(x)$, $f'(x) = a_1(x)$. Ainsi,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} a_2(x) h^2 + R_2(x,h)$$

avec $a_2 : I \to \mathbb{R}$ continue.

Soit $x \in I$, $r > 0$ tq. $]x-2r, x+2r[\subseteq I$. Soient $u, v \in]x-2r, x+2r[$. On écrit :

$$(1) \quad f(x+u+v) = f(x+u) + f'(x+u)v + \frac{1}{2} a_2(x+u) v^2 + R_2(x+u, v)$$

$$(2) \quad f(x+u+v) = f(x) + f'(x)(u+v) + \frac{1}{2} a_2(x)(u+v)^2 + R_2(x, u+v)$$

(1) − (2) donne :

$$0 = \underbrace{\left[f(x+u) - f(x) - f'(x)u - \frac{1}{2} a_2(x) u^2 \right]}_{:= g_0(u)} + \underbrace{\left[f'(x+u) - f'(x) - a_2(x) u \right]}_{:= g_1(u)} v + \underbrace{\left[\frac{1}{2} a_2(x+u) - \frac{1}{2} a_2(x) \right]}_{:= g_2(u)} v^2 + R_2(x+u, v) - R_2(x, u+v)$$

On a trié l'expression comme un polynôme en v. On impose en plus $|v| \leq |u|$.

Alors, par continuité de a_2 et par hypothèse sur R_2, il vient,

$$\frac{1}{|u|^2} \left[\frac{1}{2} v^2 (a_2(x+u) - a_2(x)) + R_2(x+u, v) - R_2(x, u+v) \right] \xrightarrow[(u,v)\to(0,0)]{} 0$$

Donc, $g_0(u) + g_1(u) v = o(u^2)$. (3)

En prenant $v = 0$, $g_0(u) = o(u^2)$ (4)

Puis, (3) − (4) donne $g_1(u) v = o(u^2)$. Avec $v = u$, il vient :

$$g_1(u) u = o(u^2) \text{ donc } g_1(u) = o(u) \text{ i.e. } f'(x+u) = f'(x) + a_2(x) u + o(u)$$

Donc, f' est C^1 sur I donc, f est C^2 sur I et $a_2 = f''$.

* **Cas $n \geq 3$.** On procède par récurrence sur $n \geq 1$. On a le cas $n=1$ et $n=2$. On suppose le résultat pour $n-1$, et on se met sous les hypothèses au rang n. Elles impliquent les hypothèses au rang $n-1$ donc par h. d. r, $f \in C^{n-1}(I)$ et $a_k = f^{(k)}$ $\forall k = 0, \dots, n-1$. Ensuite, on aurait, en exprimant $f(x+u+v)$ comme pour le cas $n=2$, et en développant les binômes :

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(u) v^k + g_n(u) v^n + R_n.$$

On aurait, par les mêmes raisons que pour $n=2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_k(u) v^k = o(u^n)$$

Par $v=0$, il vient $g_0(u) = o(u^n)$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n-1} g_k(u) v^k = o(u^n) \qquad (1)$$

On évalue ceci en $\frac{v}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} g_k(u) \frac{v^k}{2^k} = o(u^n) \qquad (2)$$

Puis, $2 \times (2) - (1)$ donne :

$$\sum_{k=2}^{n-1} g_k(u) v^k \alpha_k = o(u^n)$$

avec $\alpha_k = 1 - \frac{1}{2^k} \neq 0$ $\forall k \geq 2$. On pourrait poursuivre ce procédé de type pivot de Gauss pour simplifier $g_2, \dots, g_{n-2}$. Alors,

$$v=u \hookrightarrow \begin{cases} g_{n-1}(u) u^{n-1} = o(u^n) \\ g_{n-1}(u) = o(u) \end{cases}$$

Donc, $f^{(n-1)} \in C^1(I)$ et $f^k \in C^n(I)$ avec $a_n = f^{(n)}$ Δ.

Remarques :

- Le développement est un peu long, mais faisable en expliquant bien les choses. Le Avez le fait dans le cas général des fonctions différentiables. Difficulté technique hautement superflue à mon goût, on se noie dans le formalisme.
- Dans tous les cas, il faut bien le connaître pour qu'il rentre dans le chrono.
- Je passais 9min sur le cas $n=2$, qui renferme toutes les idées de la preuve, et évite les horreurs calculatoires. La seule chose qui est sympa dans le cas général c'est le petit pivot de Gauss, c'est chou ☺.
- Ce thm n'a pas vraiment d'application "pratique", on ne montrera jamais la régularité d'une fonction ainsi. Par contre, il explique le problème dans les contre-exemples de type $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ en 0 : c'est que les coefficients du DL (i.e. les dérivées) ne sont pas continues en 0.
- Encore une fois, si vous prenez ce dev, à mon avis, c'est important de bien commenter à l'oral chaque étape tout en restant efficace.