PROLONGEMENT MEROMORPHE DE GAMMA

On note $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On admet qu'elle est définie sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq. } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Théorème : La fonction Γ est holomorphe (et définie) sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq. } \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Elle se prolonge sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe avec des pôles simples en $-n$, $\forall n \geq 0$.

Preuve :

(1) $\forall$tq. Γ est holomorphe sur Ω. On pose $f : (z,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto t^{z-1} e^{-t}$.

* $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable $\forall z \in \Omega$ car continue.
* $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto e^{-t} \cdot t^{z-1}$ est holomorphe sur Ω, et $\forall z \in \Omega$, $\frac{\partial}{\partial z} f(t,z) = e^{-t} \cdot \ln t \cdot e^{(z-1)\ln t}$.
* Soit $K \subset \Omega$ un compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tq. $\mathrm{Re}(K) \subset [a,b]$ (car $z \mapsto \mathrm{Re}\, z$ est continue donc $\mathrm{Re}(K)$ est bornée et ses bornes sont atteintes en des points de Ω). Donc $\forall z \in K$, $\forall t > 0$,

$$|f(t,z)| \leq \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Comme $t^{b-1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t^{a-1} e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{a-1}$ intégrable car $a > 0$ donc $1-a < 1$ on a que Γ est holomorphe sur Ω par le thm d'holomorphie sous l'intégrale.

(2) Construction du prolongement.

Introduction : On souhaite prolonger Γ de façon holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si on regarde la preuve précédente, on se rend compte que le moment où l'on utilise $z \in \Omega$ est pour s'assurer que la fonction de domination est intégrable en 0. En fait, en $+\infty$, on n'aura jamais de problème. C'est cette difficulté localisée en 0 qui guide la construction du prolongement.

Soit $z \in \Omega$, on écrit : $\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt := I_1(z) + I_2(z)$

On travaille sur $I_1(z)$: $\forall t \in]0,1[$, $t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}$. On a :

$$\int_0^1 \sum_{n \geq 0} \left| \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} \right| dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{t^{n+\mathrm{Re}(z)}}{n!} dt = \int_0^1 e^{t} \cdot t^{\mathrm{Re}(z)-1} dt < +\infty \text{ car } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Donc par le théorème de Lebesgue-Lebesgue,

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$$

On pose alors $\forall n \geq 0$, $g_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$. $\forall$tq. $g = \sum_{n \geq 0} g_n$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

* $\forall n \geq 0$, g_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $z = -n$.
* Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $K \subseteq \overline{D}(0,N)$. Alors, $\forall n > N$, g_n n'a pas de pôle dans K, et $\forall z \in K$, $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$. Donc $|g_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$ donc $\sum_{n \geq N} g_n$ est normalement convergente. Donc g est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et ses pôles sont les entiers négatifs.

(3) Conclusion. En utilisant la même méthode qu'en (1), on montre que $z \mapsto I_2(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et elle y est bien définie).

Donc $z \mapsto g(z) + I_2(z)$ est définie, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ et coïncide avec Γ sur Ω. Elle constitue donc bien un prolongement méromorphe de Γ, unique par principe de prolongement analytique.

Remarques :

- Développement sympa, qui se fait bien dans le temps imparti. Introduire le (2) me semble intéressant à l'oral : cela éclaircit la démarche de la construction du prolongement et témoigne à mon goût d'un certain recul.
- Je ne l'ai pas écrit ici, mais c'est quand même mieux d'expliquer rapidement pourquoi I_2 est définie sur tout $\mathbb{C}$. Pour l'holomorphie, on l'a déjà fait en (1) en fait, donc je pense qu'on peut en faire l'économie.
- Un mot sur le thm de méromorphie sous $\int$. C'est un thm assez inhabituel, dont je n'ai pas réussi à trouver une preuve complète et convaincante. C'est pour moi le défaut majeur de ce dev, il faut se renseigner sur ce théorème à mon avis...