CARACTERISATION DE Γ

Théorème : Soit f une fonction strictement positive définie sur $]0,+\infty[$ tq.

(1) $\forall x>0,\ f(x+1)=xf(x)$ (3) $f(1)=1$.

(2) f est log-convexe (i.e. $\ln f$ est convexe)

Alors, f existe, et est unique. On a $f=\Gamma$.

Preuve :

* Existence : On mq. Γ vérifie (1), (2), (3).

(1) Si $x>0$, une IPP donne :

$$\forall M>0,\quad \int_0^M e^{-t}t^x\,dt=\left[-e^{-t}t^x\right]_0^M+x\int_0^M e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$$

avec $M\to+\infty$, on trouve bien $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(3) $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=1$.

(2) Soient $x,y>0$ et $\lambda\in]0,1[$. On écrit $\lambda=\frac{1}{p}$ et $1-\lambda=\frac{1}{q}$ de sorte que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(p,q\geq 1)$

Alors,

$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{\lambda(x-1)}\,t^{(1-\lambda)(y-1)}\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}t^{x-1}\right)^{1/p}\left(e^{-t}t^{y-1}\right)^{1/q}dt$$

$$\underset{\text{inégalité de Hölder}}{\leq}\Gamma(x)^{1/p}\,\Gamma(y)^{1/q}=\Gamma(x)^{\lambda}\,\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

D'où, $\ln\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\ln\Gamma(x)+(1-\lambda)\ln\Gamma(y)$.

* Unicité Soit f vérifiant (1), (2), (3), soit $x>0$, $n\geq 0$. Alors par (1) (et par récurrence) :

$$(*)\qquad f(x+n)=\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)f(x)$$

Rmq : Par (3), $f(n)=(n-1)!$ ~~En particulier, si f coïncide avec~~ Soit $x\in]0,1[$:

L'inégalité des pentes appliquée à $\ln\circ f$ montre que :

$$\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{n+1-n}\leq\frac{\ln f(x+n+1)-\ln f(n+1)}{x+n+1-(n+1)}\leq\frac{\ln f(2+n)-\ln f(1+n)}{2+n-(1+n)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln f(n+1)-\ln f(n)\leq\frac{\ln f(x+n+1)-\ln f(n+1)}{x}\leq\ln f(2+n)-\ln f(1+n)$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\quad \ln(n)\leq\frac{1}{x}\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)f(x)\right)-\ln n!\right)\leq\ln(n+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln(n)\leq\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x(x+1)\dots(x+n)f(x)}{n!}\right)\leq\ln(n+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad n^x\leq\frac{x(x+1)\dots(x+n)\,f(x)}{n!}\leq(n+1)^x$$

$$\Leftrightarrow\quad 1\leq\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!\cdot n^x}f(x)\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Donc, par le théorème d'encadrement,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x \in]0,+\infty[.$$

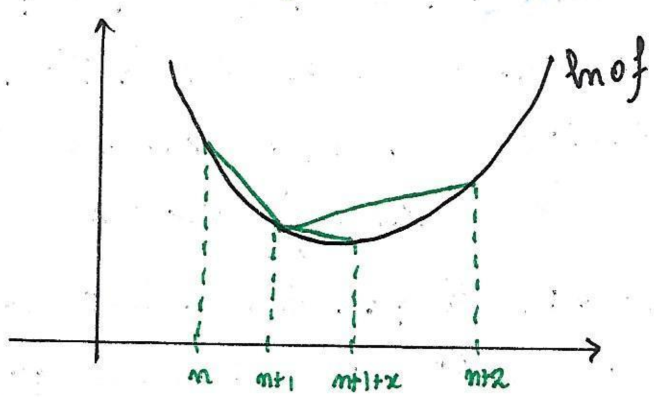
On a uniquement utilisé le fait que f vérifie (1), (2) et (3). Or, Γ vérifie ces mêmes propriétés. Donc $\forall x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = f(x).$$

Donc f est unique, vaut Γ et on a montré au passage la formule d'Euler.

Remarques :

- Développement sympa, de bonne longueur à mon avis : on est tranquille pour bien expliquer les choses. Les plus rapides le trouveront court, on pourra toujours montrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$. Faire un dessin pour l'inégalité des pentes est bien sûr une plus value (on utilise ici que $x \in]0,1]$) :



- Il faut quand même bien le connaître pour les astuces de calcul à mon avis.