

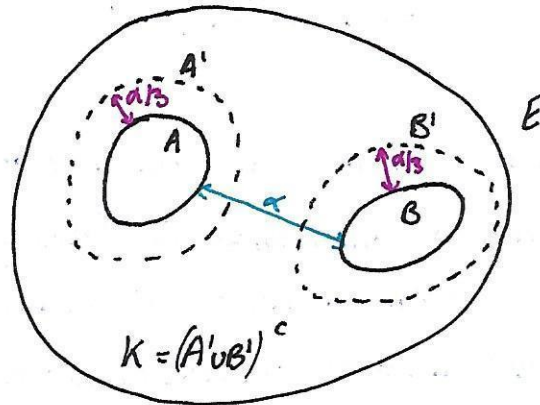
Définition: On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ d'un e.v.m. E tout élément $l \in E$ tq. $\forall \epsilon > 0, \{n \geq 0, x_n \in B(l, \epsilon)\}$ est infini.

Théorème. Soit (E, d) un espace métrique compact, et $(u_n)_n \subseteq E$ tq. $d(u_n, u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors l'espace Γ des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est convexe.

Preuve:

Supposons par l'absurde Γ non convexe. On peut mqr. $\Gamma = \bigcap_{p \geq 0} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$. Donc, Γ est fermée, donc on peut écrire $\Gamma = A \cup B$ avec A et B fermés disjoints non vides. A et B sont alors compacts car fermés dans un compact. Ainsi $\alpha := d(A, B) > 0$ (cq du thm des bornes atteintes).

On pose $A' := \{x \in E \text{ tq. } d(x, A) < \alpha/3\}$ et $B' := \{x \in E \text{ tq. } d(x, B) < \alpha/3\}$.



A' et B' étant ouverts, K est compact. Soit $N_0 \geq 0$ tq. $\forall n \geq N_0, d(u_n, u_{n+1}) < \alpha/3$.

Soit $a \in A$ et $b \in B$. Les espaces $V_a := \{n \geq N_0, d(u_n, a) < \alpha/3\}$ et $V_b := \{n \geq N_0, d(u_n, b) < \alpha/3\}$ sont infinis par définition des valeurs d'adhérence. On construit par récurrence une extraction de $(u_n)_n$ à valeurs dans K .

- Soit $N_a \in V_a$. Comme V_b est infini, $\exists N_b \in V_b$ tq. $N_b > N_a$. Si $\forall n \in [N_a, N_b]$, $u_n \notin K$, alors en prenant $n \in [N_a, N_b - 1]$ tq. $u_n \in A'$, $u_{n+1} \in B'$, $d(u_n, u_{n+1}) \geq \alpha/3$, absurde. Donc $\exists k_0 \in [N_a + 1, N_b - 1]$ tq. $u_{k_0} \in K$. Ce que l'on fait ici se comprend très bien sur le dessin: si la suite passe proche de $a \in A$, puis proche de $b \in B$ sans passer par K , alors on passe en un seul saut de A' à B' , ce qui est exclu car les termes consécutifs sont distants d'au plus $\alpha/3$.

- Supposons construits $k_0 < \dots < k_n$ tq. $u_{k_j} \in K \forall j = 0, \dots, n$. En recommençant avec N_{k_n} (possible car $\#V_a = +\infty$) on trouvera $u_{k_{n+1}} \in K$.

La suite $(u_{k_n})_n$ ainsi construite admet une valeur d'adhérence l dans le compact K .

Mais c'est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Donc,

$$l \in \Gamma \cap K = (A \cup B) \cap K \subseteq (A' \cup B') \cap K = \emptyset \quad \text{Absurde.}$$

Donc, Γ est convexe.

Application: Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, $(x_n)_n \subseteq [0, 1]$ avec $x_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$. Alors, $(x_n)_n$ converge si $|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Preuve:

- Si $(x_n)_n$ converge, alors $|x_{n+1} - x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Réciproquement, l'espace Γ des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est un intervalle fermé de $[0, 1]$ par le thm précédent. De plus, si $a \in \Gamma$, on peut trouver $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq. $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$.

Alors,

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)+1} \text{ par hypothèse car } x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)})$$

$$= f(a) \text{ car } f \text{ continue.}$$

(*) c'est bien ici que l'on utilise l'hypothèse $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$, sinon cette égalité, vertueusement fautive: prendre pour $(x_n)_n$ la suite $(-1)^n$ et $\varphi(n) = 2n \forall n \geq 0$.

Supposons $(x_n)_n$ ayant deux valeurs d'adhérence $l, l' \in [0,1]$, alors, $[l, l'] \subseteq \Gamma$ (convexité des intervalles). Donc, $\exists N \geq 0$ tq. $|x_N - \frac{l+l'}{2}| \leq \frac{l+l'}{4}$. Donc $x_N \in \Gamma$. Donc $(x_n)_{n \geq N}$ est stationnaire, donc $(x_n)_{n \geq 0}$ aussi, absurde. Donc, $(x_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence donc converge dans le compact $[0,1]$. $\square$

Remarques:

- ▷ Je trouve que c'est un super développement: bon niveau, plutôt mignon, et sa longueur modérée permet de commenter de façon pertinente les étapes. Notamment, il faut faire le dessin de A' , D et K , et bien expliquer que la construction de $(u_n)_n$ est plutôt intuitive, contrairement à ce que le formalisme fait apparaître.
- ▷ Le développement fait revoir plein de choses sur les compacts: distance entre deux compacts disjoints non vides, convergence des suites dans un compact n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence.
- ▷ Je me suis demandé si la condition $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$ suffisait à garantir le fait que $(u_n)_n$ est de Cauchy. Ceci est faux pour 1.5 raison:
 - q.s: si c'était vraie, alors, $(u_n)_n$ serait de Cauchy dans un compact, donc n'aurait qu'une seule valeur d'adhérence et le thm ne dirait rien de folichon.
 - Vraie raison: la suite des sommes partielles de la série harmonique est un contre exemple.

Mais il y a mieux: si on essaie de montrer que $(u_n)_n$ est de Cauchy sous cette hypothèse, on écrit naturellement que pour n assez grand, pour un $\varepsilon > 0$,

$$\forall p \geq 0, \quad d(u_n, u_{n+p}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(u_k, u_{k+1}) \leq (p+1)\varepsilon \text{ et là on est bloqué.}$$

Dans un espace métrique, on n'a pas mieux que l'inégalité triangulaire et donc les erreurs s'accumulent. Mais dans les espaces ultramétriques, on

écrirait: $\forall p \geq 0, \quad d(u_n, u_{n+p}) \leq \max_{1 \leq k \leq p+1} d(u_{n+k-1}, u_{n+k}) \leq \varepsilon$ et la suite est de Cauchy!

Donc le thm dans les espaces ultramétriques n'est pas très riches :)