INTEGRALES DE FRESNEL

Théorème : Les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \cos(t^2)\,dt$ et $\int_{\mathbb{R}} \sin(t^2)\,dt$ convergent et valent $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Preuve :

Convergence des intégrales : On montre que $\int_{\mathbb{R}} \cos(t^2)\,dt$ converge, l'autre intégrale se calculant de façon semblable.
Comme $t \mapsto \cos(t^2)$ est continue et paire, il suffit de mq.

$$\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt \text{ converge.}$$

Soit $A > 1$, $$\int_1^A \cos(t^2)\,dt \underset{u=t^2}{=} \int_1^{A^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du \underset{IPP}{=} \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^{A^2} + \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}}\,du\right)$$

Or, $\frac{\sin A^2}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u^{3/2}}\right| du \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{3/2}}\,du < +\infty$. Donc

$$\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt \text{ converge.}$$

NB : Les intégrales de Fresnel sont des exemples d'intégrales convergentes mais pas absolument convergentes.

Calcul des intégrales :

Posons $f : x \in [0, 2\pi[\mapsto e^{\frac{ix^2}{2\pi}} \in \mathbb{C}$ prolongée par 2π ~~continuité~~ périodicité.
$f(0) = 1 = \lim_{x\to 2\pi^-} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}$ donc f est continue et C^1 par morceaux, d'où, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \underset{\substack{\text{par IPP sur}\\ c_n(f).}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|c_n(f')|}{n} \underset{\substack{\text{inégalité de}\\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2}}_{<+\infty \text{ par la formule de Parseval}} < +\infty$$

Calculons $c_n(f)$. $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{it^2}{2\pi}} e^{-int}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{i}{2\pi}(t^2 - 2\pi n t)}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{i}{2\pi}(t-\pi n)^2 - \frac{in^2\pi}{2}}\,dt$$
$$\underset{u = t-\pi n}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{in^2\pi}{2}} \int_{-\pi n}^{\pi(2-n)} e^{\frac{iu^2}{2\pi}}\,du$$

On remarque que :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi k}^{2\pi(-k+1)} e^{\frac{iu^2}{2\pi}}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{iu^2}{2\pi}}\,du := \frac{J}{2\pi}.$$

Notons que J est convergente puisque :

$$\mathrm{Re}(J) = \int_{\mathbb{R}} \cos\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)du \underset{t=\frac{u}{\sqrt{2\pi}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\cos(t^2)\,dt$$

$$\mathrm{Im}(J) = \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)du = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\sin(t^2)\,dt$$

Ainsi, $\mathrm{Re}(J)$ <u>et</u> $\mathrm{Im}(J)$ converge donc J aussi.

Enfin, $f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ et $f(\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot(-1)^n$

Donc $f(0)+f(\pi) = 2\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{2k}(f) = \frac{J}{\pi}$

Donc $J = \pi(1+i)$, d'où, $\int_{\mathbb{R}}\cos(t^2)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\sin(t^2)\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Remarques :

- Le développement, s'il est bien maîtrisé, peut aller assez vite, et démontrer à mon avis une bonne aisance dans les calculs. On a le temps de bien expliquer la convergence des intégrales et même (je le recommande si on veut proposer ce développement dans la leçon sur les séries de Fourier) la preuve que si f est continue C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement : la preuve est assez mignonne :).
- Ce développement est malgré tout calculatoire. ~~Si les objets~~ S'il est mal maîtrisé, il peut vite devenir un enfer inextricable...
- J'ai adapté (j'espère sans erreur...) le développement du <u>131 dev</u>, qui le fait avec les coeffs de Fourier 1-périodiques ~~que j'ai~~ avec lesquels j'ai peu de pratique. Ici, j'ai utilisé les coeffs de Fourier 2π-périodiques. De même, certaines versions calculent les intégrales sur $[0,+\infty[$. Pourquoi pas, mais faites attention au résultat final, restez cohérents...