**Théorème**: Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$. Alors, $f$ est analytique sur $\Omega$. Pour $z_0 \in \Omega$ et $R := \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ la serie entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à $R$ et sa somme vaut $f(z)$ sur $D(z_0, R)$.

**Preuve**: Soit $z_0 \in \Omega$, $R := \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ et $r \in ]0, R[$. Alors, $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ et $\forall z \in D(z_0, r)$, on a par la formule de Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta} + z_0 - z} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{1 - \frac{z - z_0}{re^{i\theta}}} d\theta. \end{aligned}$$

Comme $\left|\frac{z - z_0}{re^{i\theta}}\right| < 1$, on a que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} f(z_0 + re^{i\theta})(z - z_0)^n r^{-n} e^{-in\theta} d\theta$$

Or, en posant $\varphi_n : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto f(z_0 + re^{i\theta})(z - z_0)^n r^{-n} e^{-in\theta}$ on a $\forall n \geq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$,

$$|\varphi_n(\theta)| \leq \max_{\alpha \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\alpha})| \cdot |z - z_0|^n r^{-n}.$$

La quantité à droite est sommable, donc $\sum_{n \geq 0} \varphi_n(\theta)$ cv normalement donc:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right)(z - z_0)^n$$

Donc $f$ analytique et par unicité du DSE, la quantité $a_n(r) := \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ ne dépend pas de $r$ et vaut $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

**Application**: (estimées de Cauchy): Pour $r \in ]0, R[$, on applique la formule précédente à $z = z_0 + re^{i\theta}$:

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{in\theta}.$$

on a donc une serie de Fourier convergente pour la fonction $2\pi$-periodique $\theta \mapsto f(z_0 + re^{i\theta})$.
Par l'identité de Parseval, il vient:

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Donc, chaque terme de la serie étant plus petit que le terme de droite, il vient:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\mathcal{C}(z_0, r)} |f(z)|^2 \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Ce qui donne les estimées de Cauchy :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{z \in \mathcal{C}(z_0,r)} |f(z)|. \ \forall n \geq 0.$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et bornée. Alors, $f$ est constante.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tq. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Alors $\forall n \geq 0$, $\forall r > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0.$$

Donc $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0)$. Donc, $f$ est constante.

rayon de cv infini selon le thm.

Remarques :

- Développement agréable qui se comprend bien et rentre bien dans les temps. Etant donné qu'il traite d'analyse complexe, il est de fait de bon niveau.
- La formule de Cauchy est bien sûr l'ingrédient principal. En toute humilité, je ne savais pas tout montrer (je ne ~~sav~~ connaissais pas précisément la preuve du lemme de Goursat). Je suppose que c'est mieux de savoir le montrer...