THEOREME DES EXTREMA LIES

Théorème: Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions C^1 sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tq. $a \in M := \{g_1 = \dots = g_p = 0\}$ et $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéairement indépendants. Si a est un extremum local de $f_{|M}$ alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tq. $df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, dg_i(a)$.

Preuve:

(1) Mq. M est une sous-variété en a.

On pose $g = (g_1, \dots, g_p) \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$, de sorte que $M = g^{-1}(\{0\})$. Puis, $dg(a) = \begin{bmatrix} dg_1(a) \\ | \\ dg_p(a) \end{bmatrix}$ et par hypothèse, $\operatorname{rg} dg(a) = n - \dim \bigcap_{k=1}^{p} \ker dg_k(a) = p$. Donc, $dg(a)$ est surjective (on dit que g est une submersion en a). On pose ensuite $\varphi : x \in U \longmapsto (g_1(x), \dots, g_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On va mq. M est une sous variété en a en vérifiant la définition, i.e. on montre que
$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p})$ et φ un C^1-difféo local en a.

φ est C^1 sur U et comme $dg(a)$ est surjective, on peut extraire de la matrice rectangle $\begin{bmatrix} dg_1(a) \\ | \\ dg_p(a) \end{bmatrix}$ un bloc $p \times p$ inversible, que l'on note B (quitte à permuter les colonnes). Donc

$$\operatorname{Jac} \varphi(a) = \left[\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & I_{n-p} \end{array} \right] \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Par le théorème d'inversion locale, on trouve $V_1 \subseteq U$ et $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ avec V_1, V_2 ouverts et $a \in V_1$ tq. $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ soit un C^1-difféo. Quitte à restreindre U, on considère $U = V_1$, de sorte que $g = \pi \circ \varphi$ avec $\pi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \dots, x_p)$. Enfin,

* si $x \in U \cap M$, alors, $\varphi(x) \in \varphi(U)$ et $0 = g(x) = \pi \circ \varphi(x)$ donc, $\varphi(x) \in \{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p}$.
* si $y \in \varphi(U) \cap (\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p})$ alors, $y = \varphi(x)$, $x \in U$ et $g(x) = g(\varphi^{-1}(y)) = \pi(y) = 0$. Donc $x \in M$ et $y \in \varphi(U \cap M)$. $\triangleleft$

(2) On pose $T_a M$ l'espace tangent de M en a i.e. $T_a M = \{x \in M$ tq. $\exists \varepsilon > 0, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de classe C^1 tq. $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x\}$.

Mq. $T_a M = \bigcap_{k=1}^{p} \ker dg_k(a) := T$.

On peut mq. $T_a M = (d\varphi(a))^{-1}(\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p})$. Comme $(d\varphi(a))^{-1}$ est bijective, $\dim T_a M = \dim T = n-p$.
Soit $x \in T_a M$. Alors, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ C^1 tq. $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$. Or, $\forall k = 1, \dots, p$, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $g_k(\gamma(t)) = 0$ (car $\gamma(t) \in M$). Donc,

$$0 = dg_k(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dg_k(a)(x).$$

Donc, $x \in T$ et $T_a M \subseteq T$. Par égalité des dimensions, $T_a M = T$.

(3) Mq. $T_a M \subseteq \ker df(a)$. Soit $x \in T_a M$, ε et γ comme dans (2). Alors, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f_{|M} \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ et cette fonction de t admet un extremum local en a par hypothèse. Sauf que maintenant, on est sur l'ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[$! Donc,

$$0 = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(a)(x) \text{ et } x \in \ker df(a).$$

Conclusion: Par (2) et (3), $T \subseteq \ker df(a)$ et par un fameux lemme d'algèbre linéaire sur les formes linéaires, cela suffit à mq. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tq.

$$df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, dg_i(a) \quad \triangleleft.$$

Remarques

▷ Développement de bon niveau, assez difficile à cause du bagage théorique nécessaire pour la preuve.
Certaines versions du développement se contentent pour la première étape de vérifier que g est une submersion. On conclut alors avec le fameux 'théorème des sous-variétés' qui donnent directement le résultat (souvent admis dans le plan). ~~Pour~~
Je n'ai pas fait cela pour plusieurs raisons :

- Je voulais mettre ce dev dans la leçon sur le TIL et TFI. Or, si je ne détaillais pas la première étape, je n'écrivais jamais TIL ou TFI...
  Je trouvais ça gênant, même si c'est une fameuse application du TIL.
- En ne détaillant pas la 1re étape, on cache la difficulté et la beauté de la preuve.
  C'est bien la preuve de "submersion ⇒ sous variété" qui est difficile à faire : j'y passais 10 min pour bien l'expliquer, le reste étant une application directe de la def d'espace tangent.
  Ensuite, la notion de submersion est très analytique, alors que la def des sous variétés par les fonctions de redressement vient d'une intuition géométrique. Faire le lien entre les deux est vraiment intéressant et plutôt joli je trouve !

▷ Cette démonstration est très géométrique. Il faut faire un dessin quel qu'il soit, même très simple en dimension 2, mais il faut le faire.

⋆ Preuve du fait que $T_a M = (d\varphi(a))^{-1}(\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p})$.

$\subseteq$. Si $v \in T_a M$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ C^1 tq. $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. Alors, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varphi\circ\gamma(t) \in \{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p}$, donc la dérivée aussi et
$$\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p} \ni d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(a)(v).$$

$\supseteq$. Si $v \in \{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p}$, on pose $\phi : t \mapsto tv + \varphi(a)$. $\varphi(U)$ est ouvert, donc en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, $\phi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq \varphi(U) \cap (\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p}) = \varphi(U \cap M)$. En posant $\gamma = \varphi^{-1} \circ \phi$, γ est C^1, à valeur dans M et :
$$\gamma(0) = a, \quad (\varphi\circ\gamma)'(0) = d\varphi(a)(\gamma'(0)) = \phi'(0) = v.$$

D'où, $v \in d\varphi(a)(T_a M)$.

φ est un C^1-difféo, $(d\varphi(a))^{-1}$ est un isomorphisme et
$$\dim T_a M = \dim(\{0\}_p \times \mathbb{R}^{n-p}) = n-p = \dim M.$$