

EQUIVALENCE DES NORMES ET THEOREME DE RIETZ

Théorème: Soit E un e.v.n. de dimension finie $n \geq 1$. Toutes les normes sont équivalentes sur E . (pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Preuve: Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on note:

$$N_0(x) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Soit N une autre norme. On mg. $N \sim N_0$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, alors,

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq N_0(x) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n N(e_i)}_{:= a}.$$

On a donc une première inégalité.

On munit ensuite K^n de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Alors,

$$\varphi: (K^n, \|\cdot\|_0) \longrightarrow (E, N_0)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

φ étant une bijection isométrique, c'est un homéomorphisme. On note $S := \{x \in E \text{ tq. } N_0(x) = 1\}$.

$S = \varphi(S^1)$ avec S^1 la sphere unité de $(K^n, \|\cdot\|_0)$. Or, S^1 est un fermé borné de K^n donc un compact. Donc S est un compact. Or, $\forall x, y \in E$ par inégalité triangulaire:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq a N_0(x - y).$$

Donc, $N: (E, N_0) \longrightarrow (K, |\cdot|)$ est continue. $\exists x_0 \in S$ tq. $N_0(x_0) = \inf_{x \in S} N(x) > 0$ (en effet, $N_0(x_0) = 1$ donc $x_0 \neq 0$). Donc, $\forall x \in E \setminus \{0\}$,

$$N(x) = N_0(x) \cdot N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right) \geq N_0(x) \cdot \underbrace{N(x_0)}_{:= b}$$

Donc, $N \sim N_0$ $\triangleleft$.

Théorème: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. E de dim. finie $n \geq 1$ si $B(0, 1)$ est compact.

Preuve:

($\Rightarrow$) Si E est de dimension finie, on reprend φ de la preuve précédente.

Alors, $\varphi^{-1}(B(0, 1))$ est fermé (φ^{-1} est continue) et borné. Donc $\varphi^{-1}(B(0, 1))$ est compact. Donc $\varphi(\varphi^{-1}(B(0, 1))) = B(0, 1)$ est compacte.

($\Leftarrow$) Supposons que E est de dimension infinie et par l'absurde que $\bar{B}(0,1)$ est compact. Alors, il existe $x_1, \dots, x_n \in \bar{B}(0,1)$ tq.

$$\bar{B}(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(x_i, 1)$$

On pose $F := \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Comme $\dim F < \dim E$, on peut prendre $x \in E \setminus F$. Puis, $\exists y \in F$ tq. $\|x-y\| := d(x, F) > 0$. En effet $f: z \in F \mapsto \|x-z\| \in \mathbb{R}$ est continue coercive, donc sur F de dimension finie, f atteint un minimum global. De plus, si $\|x-y\| = 0$, alors, $x \in \bar{F} = F$, exclu.

On pose $x^* := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \bar{B}(0,1)$. On a que

$$(1) \quad d(x^*, F) = \inf_{z \in F} \|x^* - z\| \leq \|x^* - 0\| = 1 \quad \text{car } 0 \in F.$$

$$(2) \quad \forall z \in F, \quad \|x^* - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \cdot \underbrace{\|x-y - \|x-y\|z\|}_{\in F} \geq \frac{1}{\|x-y\|} \cdot d(x, F) = 1.$$

Donc $d(x^*, F) = 1$. Or, $\exists i$ tq. $x^* \in \bar{B}(x_i, 1)$. Donc,

$$1 = d(x^*, F) \leq \|x^* - x_i\| < 1$$

absurde, $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Remarques:

▷ Pour la première preuve, prendre garde que l'on connaît à ce stade que les fermés bornés de $\mathbb{K}^n$ sont compacts. Je pense qu'il faut l'écrire bien clairement dans la leçon avant et annoncer pour éviter des questions gênantes du jury.

▷ Pour la seconde preuve, l'argument avec la fonction continue et coercive doit être bien connu: c'est fait dans le Cours d'analyse.