ÉQUATION DE BESSEL

On s'intéresse à l'équation de Bessel sur $\mathbb{R}^+$:

$$(B) : \begin{cases} xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(1) On mq. (B) admet une unique solution développable en série entière.

On suppose que $f(x)=\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ est une solution de (B) avec un rayon de convergence $R>0$. Sur le disque ouvert de convergence, on a alors :

$$f'(x)=\sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}x^k = a_1+\sum_{k\geq 1}(k+1)a_{k+1}x^k$$

$$xf''(x)=\sum_{k\geq 2}k(k-1)a_k x^{k-1}=\sum_{k\geq 1}(k+1)\cdot k\cdot a_{k+1}x^k$$

$$xf(x)=\sum_{k\geq 1}a_{k-1}x^k.$$

Donc,

$$a_1+\sum_{k\geq 1}\left(a_{k-1}+a_{k+1}(k+1)^2\right)x^k=0$$

Par unicité du DSE et puisque $f(0)=a_0=1$, on a que $a_1=0$ et $\forall k\geq 1$, $a_{k+1}=\frac{-1}{(k+1)^2}a_{k-1}$.
Par récurrence, on trouve, $a_k=\begin{cases} 0 \text{ si } k\in 2\mathbb{N}+1 \\ \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} \text{ si } k=2n\in 2\mathbb{N}\end{cases}$.

Réciproquement, on vérifie que $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$ a un rayon de convergence strictement positif. Soit $x\in\mathbb{R}^+$, le critère de d'Alembert donne, en posant $u_n=\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{x^2}{4(n+1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'où, le rayon de convergence est $+\infty$. On pose $\forall x\geq 0$, $J(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$.

(2) Théorème (de comparaison de Sturm) : Soient φ et ψ deux solutions non triviales respectivement des équations :

$$\begin{cases} y''(x)+q_1(x)y(x)=0 & (1) \\ z''(x)+q_2(x)z(x)=0 & (2)\end{cases} \quad \text{sur un intervalle } I$$

avec $q_1(x)\geq q_2(x)$ $\forall x\in I$. Alors, φ a au moins un zéro entre deux zéros consécutifs de ψ, sauf si $q_1\equiv q_2$ et $\varphi=\lambda\psi$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $x_1,x_2\in I$ deux zéros consécutifs de ψ sur I. Supposons que φ n'a aucun zéro sur $]x_1,x_2[$. φ est de signe constant sur $]x_1,x_2[$, disons qu'elle est positive, de même pour ψ. Les zéros de ψ sont isolés (sinon $\psi=0$) donc $]x_1,x_2[\neq\emptyset$. Posons

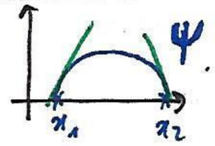
$$W=\begin{vmatrix}\varphi & \psi \\ \varphi' & \psi'\end{vmatrix}=\varphi\psi'-\psi\varphi' \text{ sur } I.$$

Alors,

$$W'=\varphi'\psi'+\varphi\psi''-\psi'\varphi'-\psi\varphi''=-\varphi q_2\psi+q_1\varphi\psi=\varphi\psi(q_1-q_2)\geq 0 \text{ sur } [x_1,x_2]$$

Donc, W est croissante sur $[x_1,x_2]$.

De plus, $\begin{cases} W(x_1) = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geq 0 \\ W(x_2) = \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0 \end{cases}$



Donc, W est constante sur $]x_1, x_2[$, donc $W' \equiv 0$ sur $]x_1, x_2[$ donc $q_1 \equiv q_2$ sur $]x_1, x_2[$.
Comme $W(x_1) = 0$, $W(t) = 0$ sur $[x_1, x_2]$ donc le wronskien de l'équation (1) est nul et comme φ et ψ en sont des solutions sur $[x_1, x_2]$ ($q_1 = q_2$), on a que $\varphi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Application à la fonction J.

En posant $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$ $\forall x > 0$, l'équation $xy'' + y' + xy = 0$ devient :

$$z''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) z(x) = 0 \qquad (1)$$

On compare avec :

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad (2).$$

(2) admet $x \mapsto \sin x$ comme solution qui s'annule en les $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.
Or, $\forall x > 0$, $1 + \frac{1}{4x^2} > 1$. Donc par le thm de comparaison de Sturm, $\forall k \geq 0$, J s'annule sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, donc une infinité de fois sur $\mathbb{R}^+$.

Remarques :

- Développement que j'ai beaucoup aimé. Il est un peu long, il ne faut pas traîner pour la partie calculatoire au début.
- Le fait que les zéros de ψ soient isolés permet de parler de zéros consécutifs. C'est un autre thm de Sturm, qui n'est pas spécialement difficile, mais il faut se renseigner. Je crois que c'est bien fait dans le Berthelin.
- Les zéros de la fonction de Bessel ont des vraies applications : je crois qu'ils sont utiles pour trouver les états propres de certains opérateurs (je peux avoir tort).
  Il peut être assez intéressant de se renseigner, surtout pour mettre ce dev dans la leçon sur les fonctions spéciales (ce qui pour moi est très pertinent, et change des éternelles fonctions ζ, Γ, B).