

THEOREME D'ECHANTILLONNAGE DE SHANNON

Soit $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $BL^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u}|_{\mathbb{R} \setminus I} \equiv 0 \text{ pp}\}$.

THEOREME:

- (i) BL^2 est un Hilbert
- (ii) $BL^2 \xrightarrow{\quad} L^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie.
 $u \mapsto (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

Preuve:

(i) BL^2 est un sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$. On montre qu'il est fermé. Soit $(u_k)_k \subseteq BL^2$, avec $u_k \xrightarrow{L^2} u$ pour $u \in L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformation de Fourier L^2 , $\hat{u}_k \xrightarrow{L^2} \hat{u}$ donc, $\frac{1}{|R|I} (\hat{u}_k - \hat{u}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Donc,

$$\|\frac{1}{|R|I} \hat{u}\|_{L^2} \leq \underbrace{\|\frac{1}{|R|I} (\hat{u}_k - \hat{u})\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|\frac{1}{|R|I} \hat{u}_k\|_{L^2}}_{=0}$$

Donc $\|\frac{1}{|R|I} \hat{u}\|_{L^2} = 0$ donc $\frac{1}{|R|I} \hat{u} \equiv 0 \text{ pp}$. Donc $u \in BL^2$.

(ii) On commence par déterminer une base hilbertienne de BL^2 .

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\chi_{\mathbb{R}I} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$. $\chi_{\mathbb{R}I} \in L^2(\mathbb{R})$.

On pose $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{\mathbb{R}I}(x-k)$. On va m.p. $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 en s'appuyant sur la base hilbertienne de $L^2(I)$ donnée par, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{2\pi i k x} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(remq: $(e_k)_k$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$ par le thm de Lebesgue L^2 par exemple).

Un calcul donne que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{E}_k = e_k$ (remq: $e_k \in L^1(\mathbb{R})$). Les fonctions en jeu étant dans $L^2(\mathbb{R})$, on a par inversion de Fourier L^2 :

$$\text{pp } \xi \in \mathbb{R}, \hat{E}_k(\xi) = e_k(-\xi) = e_k(\xi)$$

• Donc, $E_k \in BL^2 \forall k \in \mathbb{Z}$.

• De plus, si $k, j \in \mathbb{Z}$, alors,

$$\langle E_k, E_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{\text{formule de Plancherel}} \langle \hat{E}_k, \hat{E}_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{\text{car } E_k, E_j \in BL^2} \langle \hat{E}_k, \hat{E}_j \rangle_{L^2(I)} = \langle e_{-k}, e_{-j} \rangle_{L^2(I)} = \delta_{-k, -j} = \delta_{kj}.$$

Donc $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.

• On m.p. $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale en montrant que $BL^2 \cap (\text{Vect}(E_k))^{\perp} = \{0\}$. Soit $f \in BL^2 \cap (\text{Vect}(E_k))^{\perp}$.

Alors, $\int_{|R|I} f \equiv 0 \text{ pp}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$0 = \langle f, E_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \hat{f}, \hat{E}_k \rangle_{L^2(I)} = \langle \hat{f}, e_{-k} \rangle_{L^2(I)}.$$

Comme $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale, $\hat{f}|_I \equiv 0$. Donc $\hat{f} \equiv 0 \text{ pp}$ et par injectivité de la transformation de Fourier L^2 , $f \equiv 0 \text{ pp}$ et $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale. Donc $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 .

Lemme: Si $u \in BL^2$, alors, u est continue, bornée et $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{L^2}$.

Preuve: Comme $u \in BL^2$, $\hat{u} \in L^2(I) \subseteq L^1(I)$ (car $\lambda(I)=1 < \infty$ donc on a la décroissance des espaces L^p). Donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_I \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. (*)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|u(x)| \leq \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \times 1 = \|u\|_{L^2}$$

D'où, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{L^2}$. De plus, une application directe du thm de continuité sous l'intégrale donne bien u continue par la formule (*).

Conclusion: Comme $(e_k)_k$ est une base hilbertienne de BL^2 , $\forall u \in BL^2$,

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, e_k \rangle_{L^2} e_k \quad \text{où la c.v. de la série est } L^2.$$

On pose $u_{m,m} = u - \sum_{k=-m}^m \langle u, e_k \rangle e_k$. Alors, $u_{m,m} \in BL^2 \quad \forall m, m \geq 0$ (BL^2 est un e.v.) et:

$$\|u_{m,m}\|_\infty \leq \|u_{m,m}\|_{L^2} \xrightarrow{m,m \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, e_k \rangle e_k$ où la convergence de la série est uniforme. Comme $u, e_k \in BL^2$, elles sont continues ce qui permet d'écrire $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$u(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, e_k \rangle e_k(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, e_k \rangle \delta_{kj} = \langle u, e_j \rangle.$$

Donc $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e_k$ et l'identité de Parseval donne:

$$\|u\|_{L^2}^2 = \|(u(k))_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2.$$

Remarques:

- ▷ Développement fabuleux. C'est un très bel exemple d'utilisation de la théorie des ~~espaces~~ espaces de Hilbert et de l'extension L^2 de la transformée de Fourier. Il y a quand même pas mal de choses à maîtriser, mais vraiment à mon avis, le jeu en vaut la chandelle!
- ▷ Le développement tel quel est quand même une version optimisée et remasterisée de la version initiale. Pourtant, si on veut tout bien expliquer, il se peut qu'il soit un peu long en l'état. ~~Je~~ J'allais assez vite sur la partie (i) pour laisser une chance que le jury me demande de détailler. Malgré tout, je donnais les éléments essentiels. L'admettre carrément est quand même malvenu, surtout si on veut présenter ce dev dans la leçon sur les espaces de Hilbert (ce qui est en soi une très bonne idée).