

FONCTION DONT LA DIFFÉRENTIELLE EST UNE ISOMÉTRIE

Théorème: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tq. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est une isométrie. Alors f est une isométrie affine.

Introduction: Si f est une isométrie affine de $\mathbb{R}^n$ pour une norme $\|\cdot\|_2$, alors il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ tq. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) = A \in O_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $\exists A \in O_n(\mathbb{R})$ tq. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) = A$, alors $d(f-A)(x) = 0$, donc $f-A = b \in \mathbb{R}^n$, et $f = A + b$ est une isométrie affine. Le lemme précédent dit en fait que a priori, l'isométrie A n'a pas besoin d'être la même $\forall x \in \mathbb{R}^n$. On va montrer que en fait, si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\exists A \in O_n(\mathbb{R})$ tq. $df(x) = A$ ce qui nous donnera le résultat par l'argument précédent.

Preuve: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in O_n(\mathbb{R})$, donc $\|df(x)\| = \sup_{\|v\|=1} \|df(x)(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \|v\| = 1$.
Donc par le lemme des accroissements finis,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \quad (1)$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Comme $df(a) \in O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, on peut appliquer le lemme d'inversion locale. $\exists U_a$ voisinage ouvert de a et V_a voisinage ouvert de $f(a)$ tq.

$$f: U_a \rightarrow V_a$$

est un C^1 -difféomorphisme. Quitte à restreindre U_a , on peut considérer que V_a est une boule ouverte (convexe). On note g la bijection réciproque. On a $\forall x \in U_a$,

$$dg(f(x)) = (df(x))^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

en différentiant $g \circ f = \text{Id}$. Donc, $\forall u \in V_a$, $\|dg(u)\| = 1$. Donc (on utilise la convexité de V_a) par le lemme des acc. finis,

$$\forall u, v \in V_a, \|g(u) - g(v)\| \leq \|u - v\|$$

Donc $\forall x, y \in U_a$,

$$\|x - y\| = \|g \circ f(x) - g \circ f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|. \quad (2)$$

Donc $\forall x, y \in U_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. par (1) et (2)

Donc $\forall x, y \in U_a$,

on différentie en x

$$\begin{cases} \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle \\ 2 \langle df(x)(h), f(x) - f(y) \rangle = 2 \langle h, x - y \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

on différentie en y

$$\begin{cases} -2 \langle df(x)(h), df(y)(h') \rangle = -2 \langle h, h' \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \forall h' \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Donc, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|df(x)(h) - df(a)(h)\| &= \|df(x)(h)\|^2 - 2\langle df(x)(h), df(a)(h) \rangle + \|df(a)(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\langle h, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $df(x) = df(a) \quad \forall x \in U_a$.

On pose $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid df(x) = df(0)\}$.

* $E \neq \emptyset$ car $0 \in E$

* E est fermé car f est C^1 , donc $x \mapsto df(x)$ est continue et $E = \text{df}^{-1}(df(0))$.

* E est ouvert par le raisonnement précédent.

Par connexité de $\mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^n$ et on a fini.

Remarques:

► Développement pas difficile, mais sympa. Il est assez court, donc je me refuse à bien faire l'intro, ça fait voir qu'on a bien compris où on va je trouve.

J'ai écrit les choses ainsi, mais je recommande d'introduire l'espace E au départ, dire que l'on met en place un argument de connexité avant de débiter le raisonnement qui montre que E est ouvert. J'en profite d'ailleurs pour détailler ce dernier point:

* soit $x_0 \in E$, alors par le raisonnement précédent, on peut trouver un ouvert U_{x_0} tel que $\forall x \in U_{x_0}$, $df(x) = df(x_0) \underset{x_0 \in E}{=} df(0)$. Donc $U_{x_0} \subseteq E$ et E est ouvert.