

Lemme 1: Soit C un convexe symétrique (i.e. $x \in C \Rightarrow -x \in C$) tq. $0 \in C$. Soit $F: C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe tq. $F(0) = 0$. ~~Alors, si F est majorée, alors $\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|$.~~ Si F est majorée, alors $\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|$. En particulier, F est bornée.

Preuve 1: On a $\forall x \in C$, $\sup_{y \in C} F(x) \leq \sup_{y \in C} F(y) \leq \sup_{y \in C} |F(y)|$. Donc, $\sup_{x \in C} F(x) \leq \sup_{x \in C} |F(x)|$.

Supposons l'inégalité stricte. Alors, $\exists x_0 \in C$ tq. $|F(x_0)| > \sup_{x \in C} F(x) \geq F(x_0)$. Donc, $F(x_0) < 0$ et $|F(x_0)| = -F(x_0)$. Par symétrie de C et convexité de F ,

$$0 = F(0) = F\left(\frac{x_0 - x_0}{2}\right) \leq \frac{1}{2} F(x_0) + \frac{1}{2} F(-x_0)$$

Donc, $F(-x_0) \geq -F(x_0) = |F(x_0)| > \sup_{x \in C} F(x)$, absurde. Donc, on a l'égalité $\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|$.

Lemme 2: Soit $g: \overline{B}_{1,1}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $\alpha > 0$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h) = \max_{i=1, \dots, n} (\max(g(\alpha e_i), g(-\alpha e_i)))$.

Preuve 2: Posons A la quantité de droite de l'équation voulue. A est bien définie car on prend le max sur 2n valeurs. Soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tq. $\|h\|_1 \leq \alpha$. On pose $\lambda := 1 - \frac{\|h\|_1}{\alpha} \geq 0$ et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ tq. $\forall i = 1, \dots, n$, $\varepsilon_i h_i = |h_i|$. Alors,

$$\begin{aligned} g(h) &= g\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha} \varepsilon_i \alpha e_i\right) \\ &\xrightarrow[\text{convexité de } g]{\text{On cherche à faire apparaître une combinaison convexe des } g(\varepsilon_i \alpha e_i), \text{ donc la somme des coeffs doit être 1.}} g\left(\sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha} \varepsilon_i \alpha e_i + \frac{\alpha \lambda}{2} e_1 - \frac{\alpha \lambda}{2} e_1\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha} g(\varepsilon_i \alpha e_i) + \frac{\lambda}{2} g(\alpha e_1) + \frac{\lambda}{2} g(-\alpha e_1) \\ &\leq A \times 1 = A. \end{aligned}$$

D'où, $\sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h)$ existe et est majoré par A . Or, $\forall i = 1, \dots, n$, $\|\pm \alpha e_i\|_1 = \alpha$ donc, $A \leq \sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h)$.
Donc, $A = \sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(h)$.

Théorème: Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors, f est continue sur Ω .

Preuve: Soit $x \in \Omega$. $\exists \alpha > 0$ tq. f est définie sur $\overline{B}_{1,1}(x, \alpha)$. On pose $g(h) = f(x+h) - f(x)$, pour tout $h \in C := \overline{B}_{1,1}(0, \alpha)$. g est convexe et $g(0) = 0$. Les fonctions $g_i: t \in]-\alpha, \alpha[\mapsto g(te_i)$ sont convexes donc continues sur l'ouvert $] -\alpha, \alpha[$. (On utilise la continuité des fonctions convexes sur un ouvert de $\mathbb{R}$). Comme il y en a un nombre fini,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\alpha} > 0 \text{ tq. } \forall i = 1, \dots, n, \forall t \in]-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}[, \text{ on a } |g_i(t)| \leq |g_i(t)| \leq \varepsilon$$

Donc, en regardant le cas $t = \tilde{\alpha}$, on écrit) pour $\varepsilon > 0$, continuité des $(g_i)_i$.

$$\sup_{\|h\|_1 \leq \tilde{\alpha}} |g(h)| = \sup_{\substack{\text{Lemme 1} \\ \text{sur } C}} g(h) = \max_{i=1, \dots, n} \max(g(\tilde{\alpha} e_i), g(-\tilde{\alpha} e_i)) \leq \varepsilon$$

D'où la continuité de f , étant donnée la définition de g .

Remarques.

- ▷ Développement que j'ai beaucoup aimé. Une fois avoir bien en tête les astuces pour le lemme 2, tout coule tout seul. Notons que le lemme 2 nous dit où aller chercher le maximum d'une fonction convexe sur une boule, c'est intéressant en soi!
- ▷ On utilise quand même grandement la continuité des fonctions convexes de $\mathbb{R}$, il faut savoir le refaire (csg de l'inégalité des pentes).
- ▷ Si le développement n'est pas difficile en soi, il amène dans le plan de la leçon à parler de la régularité des fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$. C'est pas très difficile en soi, et c'est un très bon exercice de calcul différentiel!
- ▷ Pour la ref, il y a une preuve du Gordon qui ressemble à celle-ci, mais elle ne me convenait pas vraiment. J'ai préféré suivre le sujet d'écrit d'agreg de Lou, partie IV, questions 2-3. Corollaire: C'est pas dans un livre...