THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINEAIRE

Théorème: Soient $n \geq 1$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle avec $\mathring{I} \neq \emptyset$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathring{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy:

$$(C) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) := A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Preuve:

Cas I compact: On écrit $I = [a,b]$. $t \mapsto |||A(t)|||$ est continue sur le compact I, donc $\exists M > 0$ tq. $\forall t \in [a,b]$, $|||A(t)||| \leq M$. Donc $\forall t \in [a,b]$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\| \qquad (1)$$

donc f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, uniformément en le temps t.

On met en place un thm de point fixe: on pose

$$F : \varphi \in (C^0([a,b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\,ds\right) \in C^1([a,b])$$

thm fondamental du calcul intégral.

On a que $\begin{cases} \varphi \text{ solution de } (C) \\ \varphi \in C^1([a,b]) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(\varphi) = \varphi \\ \varphi \in C^0([a,b]) \end{cases}$

Il s'agit donc de mq. F a un unique point fixe.

On montre par récurrence sur $p \geq 0$:

$$H_p : \text{" } \forall \varphi, \psi \in (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty), \forall t \in I \quad |F^p(\varphi)(t) - F^p(\psi)(t)| \leq \frac{M^p \cdot |t - t_0|^p}{p!}\|\varphi - \psi\|_\infty \text{"}$$

- $p = 0$: $\forall \varphi, \psi \in C^0([a,b])$, $|F^0(\varphi)(t) - F^0(\psi)(t)| = \|\varphi - \psi\|_\infty \quad \forall t \in I$.
- on considère H_p vrai pour un $p \geq 0$.

Soit $t \geq t_0$ $\varphi, \psi \in C^0([a,b])$,

$$\begin{aligned} |F^{p+1}(\varphi)(t) - F^{p+1}(\psi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, F^p(\varphi)(s)) - f(s, F^p(\psi)(s))|\,ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t |F^p(\varphi)(s) - F^p(\psi)(s)|\,ds \text{ par } (1) \\ &\leq M^{p+1} \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \int_{t_0}^t \tfrac{1}{p!}(s - t_0)^p\,ds \text{ par } H_p \\ &\leq \frac{M^{p+1}}{(p+1)!}(t - t_0)^{p+1} \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

Le cas $t \leq t_0$ se traite de façon semblable, on l'admet, ce qui donne bien H_{p+1}. On en déduit :

$$\|F^p(\varphi) - F^p(\psi)\|_\infty \leq \frac{\Gamma^p \cdot (b-a)^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty \quad \begin{array}{l} \forall p \geq 0 \\ \forall \varphi, \psi \in C^0([a,b]) \end{array}$$

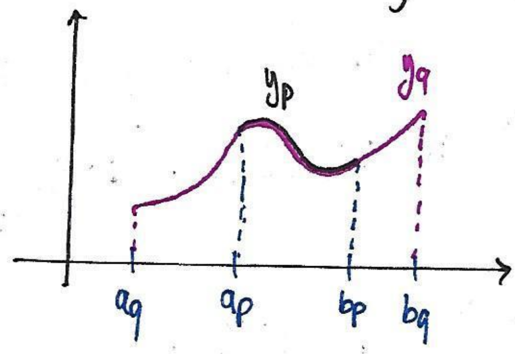
Or, $\exists p_0 \geq 0$ tq. $0 < \frac{\Gamma^{p_0} (b-a)^{p_0}}{p_0!} < 1$. Alors, ~~$F^{p_0}$~~ F^{p_0} est contractante et admet un unique point fixe dans $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ complet par le théorème de Banach. Rmq : on utilise que $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \subseteq (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ pour que F ait même espace de départ et d'arrivée.

D'où l'unicité et l'existence de la solution à (C) sur $I = [a,b]$.

· Cas général : On prend $([a_p, b_p])_{p \geq 0}$ une suite d'intervalles compacts tq. $I = \bigcup_{p \geq 0} [a_p, b_p]$. On note y_p la solution de (C) sur $[a_p, b_p]$ $\forall p \geq 0$.

On pose $y : t \in I \longmapsto y_p(t)$, ~~$p = \min_{n \geq 0} \{t \in [a_n$~~ avec $p = \min\{n \geq 0$ tq. $t \in [a_n, b_n]\}$.

Le dessin suivant explique que par unicité de la solution à (C) sur les compacts, y existe et est bien définie :



Soit $t \in I$, alors, $\exists p \geq 0$ tq. $t \in [a_p, b_p]$. Donc y est dérivable en t et :

$$y'(t) = y_p'(t) = f(t, y_p(t)) = f(t, y(t))$$

Donc y est solution de (C) sur I, et est unique par unicité sur les compacts (cf. dessin) $\triangleleft$!

Remarques :

▷ Développement long. Je recommande de passer beaucoup de temps sur le cas compact, et de dessiner en commentant pour le cas général. Malgré tout, la récurrence est assez "casse-gueule" et une erreur de notation peut rapidement tourner au vinaigre ! Faire attention à écrire des $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ ou $|\cdot|$ en fonction des objets. La version de ce développement avec les normes à poids est une bonne alternative, permettant d'esquiver une récurrence fastidieuse.

▷ Je suis passé sur ce développement à l'oral. Voir mon retour d'oral pour