

THEOREME DE WEIERSTRASS (polynômes de Bernstein)

Théorème: Toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes.

Preuve: Soit $x \in [0,1]$, $X_1, \dots, X_m$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli $B(1)$ et iid. On pose $S_m(x) = X_1 + \dots + X_m \sim B(m, x)$ pour $m \geq 1$. Alors:

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \cdot f\left(\frac{k}{m}\right) := B_m(x)$$

En outre, f était continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue par le thm de Heine. On introduit son module de continuité:

$$\omega(\delta) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

L'uniforme continuité de f est équivalente à $\omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ et on a $\forall \delta > 0, \forall h \in [0,1]$ tq. $\lambda h \leq 1$, $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$. (admis ici mais pas spécialement trivial... Je pense qu'il faut savoir le montrer).

On estime, pour $x \in [0,1]$, pour $m \geq 1$,

$$|f(x) - B_m(x)| \leq \mathbb{E}\left(|f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)|\right) \leq \mathbb{E}\left(\omega\left(x - \frac{S_m}{m}\right)\right) \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(\sqrt{m} \left|x - \frac{S_m}{m}\right| + 1\right)$$

↑ inégalité triangulaire
↑ def de ω
↑ propriété de ω avec $h = \frac{1}{\sqrt{m}} \in [0,1]$.

On écrit ensuite:

$$\mathbb{E}\left|x - \frac{S_m}{m}\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left|x - \frac{S_m}{m}\right|^2} = \sqrt{\text{Var}\left(\frac{S_m}{m}\right)} = \frac{1}{m} \sqrt{\text{Var } S_m} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

↑ Cauchy-Schwarz
↑ $x - \frac{S_m}{m}$ centrée
car $x(1-x) \leq \frac{1}{4} \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{D'où, } |f(x) - B_m(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \left(\sqrt{m} \mathbb{E}\left|x - \frac{S_m}{m}\right| + 1\right) \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

↑ linéarité de l'espérance.

Donc, $\|f - B_m\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. D'où, $B_m \xrightarrow{cu} f$.

On va montrer qu'en toute généralité, on ne peut pas améliorer cette vitesse de convergence, en exhibant une fonction f pour laquelle la vitesse de convergence de $(B_m)_m$ est de l'ordre de $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

Soit $f: x \in [0,1] \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. f est 1-lipschitzienne, donc $\forall \delta > 0, \omega(\delta) = \delta$. On a $\forall m \geq 1$,

$$\|f - B_m\|_\infty \geq \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - B_m\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \mathbb{E}\left|\frac{S_m}{m} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} \mathbb{E}|2S_m - m|.$$

Ecrivons $2S_m - m = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k \sim \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}\right)$ et posons $Y = \prod_{j=1}^m \left(1 + i \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{m}}\right)$. Alors, $\varepsilon_k \in \{ \pm 1 \}$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$.

$$\text{Alors, } |Y|^2 = \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{\varepsilon_j^2}{m}\right) = \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq e. \text{ D'où, } \mathbb{E}|2S_m - m| \cdot |Y| \leq \sqrt{e} \mathbb{E}|2S_m - m|. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } \mathbb{E}((2S_m - m)Y) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k Y\right) = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(\varepsilon_k Y) = m \mathbb{E}\left(\varepsilon_1 \prod_{k=2}^m \left(1 + i \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{m}}\right)\right) \\ &= m \mathbb{E}\left(\varepsilon_1 + i \frac{\varepsilon_1^2}{\sqrt{m}}\right) \cdot \prod_{k=2}^m \mathbb{E}\left(1 + i \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{m}}\right) \\ &= i\sqrt{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \sqrt{m} = |\mathbb{E}((2S_m - m)Y)| \leq \mathbb{E}|2S_m - m| \cdot |Y| \leq \sqrt{e} \mathbb{E}|2S_m - m|. \text{ Donc, } \mathbb{E}|2S_m - m| \geq \sqrt{\frac{m}{e}}.$$

Donc, $\|f - B_m\|_\infty \geq \frac{1}{2n} \cdot \sqrt{\frac{m}{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Donc à une constante près, on atteint bien la vitesse de convergence attendue.

Remarques:

- ▷ Développement certes ultra classique mais dont il faut se méfier: les propriétés du module de continuité sont plus subtiles qu'il n'y paraît, il faut les maîtriser... Un de mes collègues s'est copieusement fait cuisiner sur ça le jour de Noël...
- ▷ La preuve de l'optimalité de la vitesse de convergence est quand même sympa, mais il faut être bien organisé au tableau pour qu'on comprenne ce qui est fait. Il faut se renseigner mais je crois qu'on montre un cas particulier de l'inégalité dite de Khintchine en probabilités.