

THEOREME DE LEVY

Thm: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement.

Preuve: On prend pour définition de $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$: $\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X)$.
 $\Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}), \mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X)$.

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors, comme $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée, il vient que
 $\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n}) \rightarrow \mathbb{E}(e^{itX}) = \varphi_X(t)$

Réciproquement, supposons $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$. Alors, $\exists \psi \in S(\mathbb{R})$ tq. $g = \hat{\psi}$. Il vient alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(X_n) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) dP_{X_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-ix\xi} dx dP_{X_n}(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} dP_{X_n}(\xi) dx \quad \text{par le thm de Fubini-Lebesgue} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \varphi_{X_n}(-x) dx. \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{X_n}(-x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_X(-x)$ par hypothèse et $\forall n, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi_{X_n}(-x)| \leq |\varphi_X(-x)| \leq 1$.

Donc, par convergence dominée, $\mathbb{E}g(X_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \varphi_X(-x) dx = \mathbb{E}g(X)$ en remontrant les mêmes calculs. On a pu $C_c^\infty(\mathbb{R})$ car même dans $C_c(\mathbb{R})$.

En particulier, soit $\varepsilon > 0$, et soit $f \in C_c(\mathbb{R}), \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq. $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon/3$.

Il vient alors

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| &\leq |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}g(X_n)| \\ &\leq \mathbb{E}|f(X_n) - g(X_n)| \leq \mathbb{E}|g(X_n) - g(X)| + |\mathbb{E}g(X_n) - \mathbb{E}g(X)| \\ &\leq \varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand par le m\u00eame proc\u00e9d\u00e9.} \end{aligned}$$

Thm (Central Limit). Soit $(X_k)_k$ une suite de v.a. iid dans L^2 . En notant

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \text{ on a:}$$

$$\sqrt{n} \frac{S_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\text{Var } X_1}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve: On traite le cas $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On pose $Z_n := \frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Par ind. des $(X_k)_k, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(it \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(e^{it \frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Comme $X_1 \in L^2$, φ_{X_1} est deux fois dérivable en 0 et: $\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\text{Donc } \varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)^n \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$\text{or, } \left|1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right|^n - 1 = \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} o\left(\frac{1}{n}\right)^k\right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|^k = \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)^n - 1$$

Donc $\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \varphi_N(t)$ où $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
 $= \exp\left(n \ln\left(1 + \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 1 = 0$

Remarques:

- ▷ Développement certes classique, mais qui a du charme je trouve.
J'admets ici l'équivalence entre deux defs de la convergence en loi. Certaines versions du développement propose de montrer l'équivalence, mais je ne trouvais pas ça très fun et c'était plutôt long...
- ▷ J'ai utilisé la densité de C^∞ dans C_c , ultra simple à montrer par convolution.
Certaines versions du dev propose des choses assez exotiques comme le "compactifié d'Alexandrov" que je me suis empressé de fuir. En tout cas, je pense qu'il est bon de ^{savoir} montrer la propriété de densité qui est utilisée.