

Valeurs propres des matrices stochastiques irréductibles

Aurélien Guerder

2023-2024

Source : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 2

Définition 1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs et si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$, c'est-à-dire la somme des coordonnées de chaque ligne vaut 1.

Elle est dite irréductible si $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists k \in \mathbb{N}^*, (A^k)_{i,j} > 0$.

Théorème 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Alors $\rho(A) = 1$ et $\text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Démonstration. **Etape 1 :** $\rho(A) = 1$ (p.75, 2.6) :

On a, comme A est stochastique, $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $1 \in \text{Sp}(A)$ et donc $\rho(A) \geq 1$.

Soit maintenant $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Montrons que $|\lambda| \leq 1$.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_i| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$.

Avec la ligne i de $AX = \lambda X$, on a

$$\lambda - a_{i,i} = \sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i} \quad (1)$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\lambda| - a_{i,i} &\leq |\lambda - a_{i,i}| \\ &= \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} \\ &= 1 - a_{i,i} \end{aligned}$$

d'où $|\lambda| \leq 1$.

Etape 2 : Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$. Si X est un vecteur propre et x_i une coordonnée de module maximal, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow x_j = \lambda x_i$, ce qui entraîne $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} x_j = a_{i,j} \lambda x_i$ (p.76, 2.7 q.1) :

Supposons $\lambda \neq 1$. Comme $|\lambda| = 1$, les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités.

$1 - a_{i,i} = |\lambda - a_{i,i}|$ donne que $\lambda \in C(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$. Or, $|\lambda| = 1$ donc si $a_{i,i} \neq 0$, $\lambda = 1$, ce qui est exclu par hypothèse. D'où $a_{i,i} = 0$.

Posons $I = \{j \neq i \mid a_{i,j} \neq 0\} \neq \emptyset$.

Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, les $\left(a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\right)_{j \in I}$ sont sur une même demi-droite partant

de 0, et de plus, $\sum_{j \in I} a_{i,j} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| = \sum_{j \in I} a_{i,j}$ donne $|x_j| = |x_i| \forall j \in I$, d'où $\forall j \in I, \exists \theta \in \mathbb{R}, x_j = e^{i\theta} x_i$.

Avec $1, \lambda = \sum_{j \in I} a_{i,j} e^{i\theta} = e^{i\theta}$ d'où $\forall j \in I, x_j = e^{i\theta} x_i$ et le résultat.

Etape 3 : Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$, toutes les coordonnées de X sont de même module.

Soit x_i une coordonnée de module maximal de X . Soit $j \neq i$. Comme A est irréductible, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A^k)_{i,j} > 0$. λ^k étant valeur propre de A^k , l'étape 2 appliquée à A^k donne que x_i et x_j ont même module.

Etape 4 : Preuve du théorème :

Soient λ et $\mu \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$, et soient X et Y des vecteurs propres de A respectivement associés à λ et μ . Posons $Z = (x_k y_k)_k$. Montrons que Z est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda\mu$.

$$\begin{aligned}
 (AZ)_i &= \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j y_j \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{i,j} \lambda x_i y_j && \text{(Etape 2)} \\
 &= \lambda x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \\
 &= \lambda x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} \mu y_i && \text{(Etape 2)} \\
 &= \lambda \mu x_i y_i \lambda x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} \\
 &= \lambda \mu x_i y_i
 \end{aligned}$$

D'où le résultat : $\lambda\mu \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$.

Soit maintenant $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$. Alors comme A est à coefficients réels, $\lambda^{-1} = \bar{\lambda} \in \text{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$.

□