

Théorème de Féjer

Aurélien Guerder

2023-2024

Source :

1. LESESVRE, MONTAGNON, LE BARBENCHON, PIERRON, 131 développements pour l'oral
2. Olivier GARET – Aline KURTZMANN, De l'intégration aux probabilités, Deuxième édition augmentée

On désigne par L^p l'ensemble $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ où $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est muni de la mesure de Lebesgue.

Remarque : Nous allons, dans la preuve du théorème de Féjer, utiliser un résultat sur les approximations de l'unité, dont on peut démontrer le point le plus pertinent en fonction de la leçon choisie (si on privilégie le théorème version L^p ou convergence uniforme).

Définition 1. Soit $(\phi_n)_n$ une suite de fonctions mesurables 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$. On dit que $(\phi_n)_n$ est une approximation de l'unité si les ϕ_n sont positives, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{[-\pi, \pi]} \phi_n d\lambda = 1$ et

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[} \phi_n d\lambda = 0$$

Proposition 1. Soit $(\phi_n)_n$ une approximation de l'unité.

- Pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, la suite $(f * \phi_n)_n$ converge uniformément vers f .
- Pour toute fonction $f \in L^p$, la suite $(f * \phi_n)_n$ converge vers f dans L^p .

Pour la preuve, on va utiliser ce résultat, dont une preuve se trouve dans (2) :

Proposition 2. Soit $f \in L^p$. On définit $T_t f(\cdot) = f(\cdot - t)$. Alors l'application $t \mapsto T_t f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^p .

Passons à la preuve de la proposition 1 :

Démonstration. (Source : (2))

Premier point : Soit f une fonction uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} f * \phi_n(x) - f(x) &= \int_{[-\pi, \pi]} f(x-t) \phi_n(t) d\lambda(t) - f(x) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} (f(x-t) - f(x)) \phi_n(t) d\lambda(t) \\ &= \int_{]-\delta, \delta[} (f(x-t) - f(x)) \phi_n(t) d\lambda(t) + \int_{[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[} (f(x-t) - f(x)) \phi_n(t) d\lambda(t) \end{aligned}$$

D'où $|f * \phi_n(x) - f(x)| \leq \int_{]-\delta, \delta[} \omega_f(\delta) \phi_n(t) d\lambda(t) + \int_{[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[} 2\|f\|_\infty \phi_n(t) d\lambda(t)$ où ω_f désigne le module de continuité de f . Par passage au sup sur x ,

$$\|f * \phi_n - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R} \setminus]-\delta, \delta[} \phi_n d\lambda$$

Donc on a $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|f * \phi_n - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)$, et ceci quelque soit $\delta > 0$. Or, comme f est uniformément continue, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \phi_n - f\|_\infty = 0$.

Deuxième point : Soit $f \in L^p$. On a :

$$\begin{aligned} |f * \phi_n(x) - f(x)| &= \left| \int (f(x-t) - f(x)) \phi_n(t)^{1/p} \phi_n(t)^{1-1/p}(t) d\lambda(t) \right| \\ &\leq \left(\int \phi_n(t) d\lambda(t) \right)^{1-1/p} \left(\int |f(x-t) - f(x)|^p \phi_n(t) d\lambda(t) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int |T_t f(x) - f(x)|^p \phi_n(t) d\lambda(t) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder. Maintenant, on peut élever à la puissance p et intégrer, ce qui nous donne :

$$\|f * \phi_n - f\|_p^p \leq \int \|T_t f - f\|_p^p \phi_n(t) d\lambda(t)$$

par le théorème de Tonelli.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 2, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]-\delta, \delta[, \|T_t f - f\|_p \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|f * \phi_n - f\|_p^p &\leq \int_{]-\delta, \delta[} \|T_t f - f\|_p^p \phi_n(t) d\lambda(t) + \int_{[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[} \|T_t f - f\|_p^p \phi_n(t) d\lambda(t) \\ &\leq \varepsilon^p + (2\|f\|)^p \int_{[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[} \phi_n(t) d\lambda(t) \end{aligned}$$

On passe à la limite supérieure : $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|f * \phi_n - f\|_p^p \leq \varepsilon^p$, d'où en faisant tendre ε vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \phi_n - f\|_p = 0$$

□

Passons maintenant au théorème de Féjer :

Si f est 2π -périodique et intégrable sur $[-\pi, \pi]$, on note $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(x) e^{-inx} dx$.

On note pour $n \geq 0, D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$, et $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_n(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} f * D_n(x)$.

On note pour $n \geq 1, K_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p$ et $\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = \frac{1}{2\pi} f * K_n$

Théorème 1. - Si f est continue périodique de période 2π , alors $\sigma_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ uniformément.

- Si $f \in L^p$, alors $\sigma_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^p .

Démonstration. (Source : (1))

Etape 1 : $\forall x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}, K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$:

$$\begin{aligned}
nK_n(x) \sum_{p=0}^{n-1} D_p &= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=-p}^p e^{ikx} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} e^{-ipx} \frac{e^{(2p+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{1}{e^{ix} - 1} \left(\sum_{p=0}^{n-1} e^{i(p+1)x} - \sum_{p=0}^{n-1} e^{-ipx} \right) \\
&= \frac{1}{e^{ix} - 1} \left(e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} - \frac{e^{-inx} - 1}{e^{-ix} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{e^{ix} - 1} \left(\frac{e^{inx/2}(e^{inx/2} - e^{-inx/2})}{e^{-ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} - \frac{e^{-inx/2}(e^{-inx/2} - e^{inx/2})}{e^{-ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \right) \\
&= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \left(\frac{1}{e^{ix} - 1} \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{-ix/2}} \right) \\
&= \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}
\end{aligned}$$

Etape 2 : $\frac{K_n}{2\pi}$ est une approximation de l'unité :

- Par l'expression de l'étape 1, K_n est positive presque partout.

- On a

$$\int_{[-\pi, \pi]} K_n d\lambda(t) = \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(t) d\lambda(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \int_{[-\pi, \pi]} D_p(t) d\lambda(t)$$

Or, on calcule facilement que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\int_{[-\pi, \pi]} D_p(t) d\lambda(t) = 2\pi$, d'où $\int_{[-\pi, \pi]} K_n d\lambda(t) = 2\pi$.

- Soit $\delta \in]0, \pi[$. Comme $x \mapsto \sin^2(x/2)$ est continue et positive sur $[\delta, \pi]$, elle y admet un minimum

$$m > 0. \text{ Donc } \int_{\delta}^{\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx \leq \frac{\pi - \delta}{mn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Etape 3 : Conclusion :

Par la proposition 1, si f est continue périodique de période 2π (elle est alors uniformément continue), on a $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi} f * K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ uniformément, et si $f \in L^p$, $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi} f * K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^p . $\square$

Remarque : il faut savoir montrer qu'une fonction sur $\mathbb{R}$ continue 2π -périodique est uniformément continue : pour cela on peut utiliser le théorème de Heine sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Dans le cadre L^2 , on peut en déduire une conséquence qui rentre bien par exemple dans la leçon sur les espaces de Hilbert :

Corollaire 1. Notons $e_n(x) = e^{ixt}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.