

Fonction caractéristique

Aurélien Guerder

2023-2024

Source :

1. Olivier GARET – Aline KURTZMANN, De l'intégration aux probabilités, Deuxième édition augmentée
2. Hervé Queffélec, Claude Zuily, Analyse pour l'agrégation

Définition 1. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, on appelle fonction caractéristique de μ la fonction ϕ_μ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$.

Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction caractéristique de sa loi $\mathbb{P}_X$, c'est-à-dire $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Théorème 1. La fonction caractéristique caractérise la loi, c'est-à-dire si μ et ν sont deux mesures de probabilité,

$$\mu = \nu \iff \phi_\mu = \phi_\nu$$

Démonstration. (Source : (1))

Soit $a < b$. Montrons la formule d'inversion :

$$\mu([a, b]) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t) dt \quad (1)$$

Posons

$$I_T(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t) dt$$

Il faudra montrer que cette intégrale est bien définie car il y a a priori un problème en 0. Supposons dans un premier temps que ce soit le cas.

$$\begin{aligned} I_T(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \int \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} d\mu(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dt d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int_{-T}^T \frac{\cos(t(x-a)) + i \sin(t(x-a)) - \cos(t(x-b)) - i \sin(t(x-b))}{it} dt \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Où on a utilisé le théorème de Fubini à la ligne 2.

Or $\frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{it}$ est intégrable au voisinage de 0 (faire un développement limité à l'ordre 2 de cos), et est impaire, donc son intégrale sur $[-T, T]$ est nulle. D'où :

$$\begin{aligned} I_T(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int_{-T}^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt \right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\operatorname{sgn}(x-a) \int_{-T|x-a|}^{T|x-a|} \frac{\sin(t)}{t} dt - \operatorname{sgn}(x-b) \int_{-T|x-b|}^{T|x-b|} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Or, $y \mapsto \int_{-y}^y \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet π pour limite en $+\infty$ (intégrale de Dirichlet ([avoir une idée de comment le montrer!](#)) et est continue, donc sa norme est bornée par une constante M . Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$I_T(a, b) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int f_{a,b}(x) d\mu(x) = \mu([a, b]) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b))$$

où

$$f_{a,b}: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < a \\ 1/2 & \text{si } x = a \\ 1 & \text{si } a < x < b \\ 1/2 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

d'où la formule d'inversion voulue.

Montrons que $I_T(a, b)$ est bien définie : En mettant des modules, par les mêmes calculs et avec le théorème de Tonelli,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int \left| \int_{-T|x-a|}^{T|x-a|} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{-T|x-b|}^{T|x-b|} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| d\mu(x) \leq \frac{M}{\pi} < +\infty.$$

Soit μ et ν deux mesures de probabilité qui ont la même fonction caractéristique. Posons maintenant $E = \{x \in \mathbb{R}; \mu(\{x\}) > 0 \text{ ou } \nu(\{x\}) > 0\}$, qui est dénombrable (c'est les lieux des discontinuités des fonctions caractéristiques de μ et ν dont on sait qu'ils sont dénombrables). ([Remarque : il faut savoir montrer cela!](#))

On a $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus E$ avec $a < b, \mu([a, b]) = \nu([a, b])$ par la formule 1. Montrons que ces intervalles forment un π -système qui engendre la tribu borélienne.

On sait que les intervalles ouverts engendrent la tribu borélienne. Or, soit $]a, b[$ un intervalle ouvert. Comme E est dénombrable, on peut construire 2 suites $(a_n)_n$ décroissante et $(b_n)_n$ croissante de E , avec $a_0 < b_0$ et $(a_n)_n$ converge vers a et $(b_n)_n$ converge vers b . Alors $]a, b[= \bigcup_{n \geq 0}]a_n, b_n[$ donc la tribu engendrée par les intervalles ouverts à bornes dans $\mathbb{R} \setminus E$ contient la tribu borélienne, et lui est donc égale (l'autre inclusion est évidente).

Les mesures μ et ν sont égales sur un π -système qui engendre la tribu, d'où $\mu = \nu$.

Le sens réciproque du théorème est évident.

□

Théorème 2. Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles. Alors X_n converge en loi vers X si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(t)$.

Pour prouver ce théorème, on utilisera et on admettra ce résultat sur la transformée de Fourier (qu'il faut savoir prouver) :

Proposition 1. Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \|x^n f^{(m)}(x)\|_\infty < +\infty\}$ l'espace de Schwarz. Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

est bien définie et bijective.

On utilisera aussi cette caractérisation de la convergence en loi :

Proposition 2. Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles. Alors X_n converge en loi vers X si et seulement si $\forall f$ continue positive à support compact, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X))$, c'est-à-dire que dans la définition de la convergence en loi, on peut se limiter aux fonction continues positives à support compact.

Il est bon de savoir l'idée de la preuve mais on ne la présentera pas en développement si on veut pouvoir tenir 15 minutes (on peut simplement mettre ce résultat dans le plan)

Démonstration. Voir (1). □

Passons à la preuve du théorème 2.

Démonstration. (Source : (2))

Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(t)$. Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. En effet, si f est à support dans $[-A, A]$, on peut d'après le théorème d'approximation de Weierstrass choisir une fonction polynômiale P telle que $\|f - P\|_{\infty, [-2A, 2A]} < \frac{\varepsilon}{3}$, qu'on multiplie par une fonction plateau valant 1 sur $[-A, A]$ et à support dans $[-2A, 2A]$. (Il faut savoir construire une telle fonction!)

On a $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc il existe $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $g = \hat{h}$. Alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n) - f(X))| &\leq |\mathbb{E}(f(X_n) - g(X_n))| + |\mathbb{E}(g(X_n) - g(X))| + |\mathbb{E}(g(X) - f(X))| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |\mathbb{E}(g(X_n) - g(X))| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X_n)) &= \mathbb{E}(\hat{h}(X_n)) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n} h(t) dt\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \mathbb{E}(e^{itX_n}) dt && \text{(Théorème de Fubini)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(t) \mathbb{E}(e^{itX}) dt && \text{(Théorème de convergence dominée, en majorant par } |h|) \\ &= \mathbb{E}(g(X)) \end{aligned}$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |\mathbb{E}(g(X_n) - g(X))| < \frac{\epsilon}{3}$ et donc $|\mathbb{E}(f(X_n) - f(X))| < \epsilon$ d'où le résultat.

La réciproque est immédiate par la définition de la convergence en loi. □