

Décomposition polaire C^∞

Aurélien Guerder

2023-2024

Source : LESESVRE, MONTAGNON, LE BARBENCHON, PIERRON, 131 développements pour l'oral

Théorème 1.

$$\begin{array}{ccc} \psi & : & O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ & & (O, S) \mapsto OS \end{array}$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Remarque : Le jury peut demander ce que signifie être de classe C^∞ alors que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ ($S_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$, on peut le montrer en exercice, par exemple en utilisant le théorème spectral; $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est aussi un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$). Deux réponses sont possibles. La première, plus simple, est de dire qu'on peut considérer ψ définie sur $M_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est C^∞ et ψ^{-1} à valeurs dans $M_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ et cela règle le problème. La deuxième réponse plus compliquée est de savoir montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété différentielle de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour montrer ce théorème, commençons par montrer :

Proposition 1.

$$\begin{array}{ccc} \phi & : & S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ & & S \mapsto S^2 \end{array}$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Démonstration. • **Surjectivité** : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $A = PDP^{-1}$. Posons $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = PD'P^{-1}$. Alors, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\phi(S) = A$.

• **Injectivité** : On garde les mêmes A et S qu'avant. En prenant un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, ce qui est possible en prenant un polynôme interpolateur, alors on a $S = Q(A)$. Soit $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S'^2 = A = S^2$. Alors $S'^3 = S'A = AS'$ donc S' commute avec A donc avec $Q(A) = S$. On a ainsi, $0 = S'^2 - S^2 = (S' - S)(S' + S)$. Or $S' + S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $S' + S$ est inversible, d'où $S' - S = 0$ et $S' = S$.

• **C^∞ -difféomorphisme** : ϕ est de classe C^∞ car les coefficients de $\phi(S)$ sont polynomiaux en les coefficients de S .

Pour $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\forall H \in S_n^{++}(\mathbb{R}), D\phi(S)(H) = SH + HS$. Montrons que $D\phi(S)$ est inversible.

Par le théorème spectral, il existe $(u_i)_i$ une base de vecteurs propres de S pour les valeurs propres $(\lambda_i)_i$.

Soit $H \in \text{Ker}(D\phi(S))$. On a alors $SH = -HS$, donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}, SHu_i = -HSu_i = -H\lambda_i u_i = -\lambda_i Hu_i$. Or, $-\lambda_i \leq 0$ et les valeurs propres de S sont strictement positives, donc $-\lambda_i$ n'est pas valeur propre de

S , d'où forcément $Hu_i = 0$. Ceci $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $(u_i)_i$ est une base, d'où $H = 0$ et $D\phi(S)$ est injective donc inversible.

Le théorème d'inversion globale permet de conclure que ϕ est un C^∞ -difféomorphisme. $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème.

Démonstration. • **Injectivité :** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, soit $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$.

On a que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: en effet, tAA est clairement symétrique, et pour $x \neq 0$,

$$\langle {}^tAAx, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 > 0.$$

$${}^tAA = {}^t(OS)OS = S^tOOS = S^2 \text{ donc } S = \phi^{-1}({}^tAA) \text{ et } O = A(\phi^{-1}({}^tAA))^{-1}$$

• **Surjectivité :** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, posons $S = \phi^{-1}({}^tAA)$ et $O = A(\phi^{-1}({}^tAA))^{-1}$.

Alors, $A = OS$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $O^tO = AS^{-1}({}^tAS^{-1}) = AS^{-2}{}^tA = A({}^tAA)^{-1}{}^tA = AA^{-1}{}^tA^{-1}{}^tA = I_n$ d'où $O \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$

• **C^∞ -difféomorphisme :** ψ est de classe C^∞ par le même argument que pour ϕ .

On a $\psi^{-1} : A \mapsto \left(A(\phi^{-1}({}^tAA))^{-1}, \phi^{-1}({}^tAA) \right)$.

On rappelle que $M \mapsto M^{-1}$ est C^∞ de $GL_n(\mathbb{R})$ dans lui-même : en effet, avec la formule de M^{-1} avec la comatrice, on a que les coefficients de M^{-1} sont rationnels en les coefficients de M .

Ainsi, comme on a des produits, des inverses et ϕ^{-1} qui est C^∞ , alors ψ^{-1} est aussi C^∞ .