

Décomposition de Dunford

Aurélien Guerder

2023-2024

Source : LESESVRE, MONTAGNON, LE BARBENCHON, PIERRON, 131 développements pour l'oral

Remarque : On n'est pas obligé de tout présenter, je pense même que c'est impossible en 15 minutes. On peut par exemple admettre les 2 premiers lemmes et les prouver si on a le temps à la fin, ou si le jury le demande.

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Théorème 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (D, N) où $D \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable et $N \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente telle que $DN = ND$ et $A = D + N$. De plus, $D, N \in \mathbb{K}[A]$.

Remarque : on verra après qu'on peut généraliser ce résultat pour toutes les matrices, pas seulement lorsque χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Montrons quelques lemmes techniques avant de prouver le théorème.

Lemme 1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{K}[M]$.

Démonstration. Notons $\chi_M = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Alors comme $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $a_0 \neq 0$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$ donc $\sum_{i=0}^n a_i M^i = 0$

On obtient alors $a_0 I_n = -\sum_{i=1}^n a_i M^i = -M \sum_{i=1}^n a_i M^{i-1}$ donc on a $M^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i M^{i-1} \in \mathbb{K}[M]$. $\square$

Lemme 2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors Y^2 divise $Q(X+Y) - Q(X) - YQ'(X)$ dans $\mathbb{K}[X, Y]$.

Démonstration. Montrons le résultat pour $Q = X^k$, le cas général en découlera par linéarité.

Si $k = 0$ ou 1 , $Q(X+Y) - Q(X) - YQ'(X) = 0$ donc on a le résultat.

Si $k \geq 2$, $(X+Y)^k - X^k - kYX^{k-1} = \sum_{i=2}^k X^{k-i} Y^i = Y^2 \sum_{i=2}^k X^{k-i} Y^{i-2}$. $\square$

Lemme 3. Si N est nilpotente et U est inversible et $UN = NU$, alors $U - N$ est inversible.

Démonstration. Remarque : l'idée pour se souvenir de la preuve est qu'on veut se ramener à quelque chose qui ressemble à une série géométrique, sauf qu'on a des matrices :

On écrit $U - N = U(I_n - U^{-1}N)$ et on veut inverser $I_n - U^{-1}N$, donc, grossièrement, trouver $\frac{1}{I_n - U^{-1}N}$

(ne jamais écrire cela!). Or on connaît la formule $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour x complexe de module inférieur

à 1, d'où l'idée de considérer $\sum_{k=0}^{+\infty} (U^{-1}N)^k$ qui est en fait une somme finie car N est nilpotente.

Considérons la matrice $\left(\sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} N^k\right) U^{-1}$. On va montrer que c'est l'inverse de $U - N$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} N^k\right) U^{-1} (U - N) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} N^k\right) (I_n - U^{-1} N) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} N^k - \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k-1} N^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} U^{-k} N^k - \sum_{k=1}^n U^{-k} N^k \\ &= I_n - U^{-n} N^n \\ &= I_n \end{aligned}$$

□

Passons à la preuve du théorème 1.

Démonstration. Posons $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$ (c'est-à-dire le polynôme caractéristique mais en rendant simples les racines).

Considérons $A_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}, A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}$.

Remarque : Pour se rappeler de l'expression de cette suite, pensez à la méthode de Newton si vous la connaissez : ici on cherche à annuler P pour obtenir la matrice D diagonalisable.

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, montrons

1. $A_k \in \mathbb{K}[A]$
2. $P'(A_k) \in GL_n(\mathbb{K})$ (pour que la suite soit bien définie)
3. $\exists B_k \in \mathbb{K}[A], P(A_k) = P(A)^{2^k} B_k$

Initialisation : Pour $k = 0$: 1 est clair, et 3 aussi avec $B_0 = I_n$.

Comme P est scindé à racines simples, $P \wedge P' = 1$ donc il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$. Or, pour un certain $m \geq 1, \chi_A \mid P^m$ donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $P^m(A) = 0$ donc $P(A)$ est nilpotente. Or $U(A), P(A) \in \mathbb{K}[A]$ donc ces deux commutent et $U(A)P(A)$ est aussi nilpotente. Ainsi, par le lemme 3, $V(A)P'(A) = I_n - U(A)P(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ d'où $P'(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a le point 2.

Hérédité : Supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour $k \in \mathbb{N}$.

Clairement, $A_{k+1} \in \mathbb{K}[A]$ d'où le point 1.

Pour le point 3, considérons $M = A_{k+1} - A_k = -P(A_k)P'(A_k)^{-1}$.

En notant $P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + \tilde{P}(X, Y)$ (grâce au lemme 2),

$$\begin{aligned}
P(A_{k+1}) &= P(A_k + M) \\
&= P(A_k) + MP'(A_k) + M^2 \tilde{P}(A_k, M) \\
&= M^2 \tilde{P}(A_k, M) \\
&= P(A_k)^2 P'(A_k)^{-2} \tilde{P}(A_k, M) \\
&= P(A)^{2^{k+1}} B_k^2 P'(A_k)^{-2} \tilde{P}(A_k, M) \\
&= P(A)^{2^{k+1}} B_{k+1}
\end{aligned}$$

où $B_{k+1} = B_k^2 P'(A_k)^{-2} \tilde{P}(A_k, M) \in \mathbb{K}[A]$, d'où le point 3.

Pour le point 2, en dérivant selon Y dans $P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + \tilde{P}(X, Y)$, on obtient $P'(X + Y) = P'(X) + Y\tilde{Q}(X, Y)$.

Avec $X = A_k$ et $Y = M$, $P'(A_{k+1}) = P'(A_k) + M\tilde{Q}(A_k, M)$ où $P'(A_k), M\tilde{Q}(A_k, M) \in \mathbb{K}[A]$.

Montrons que $M\tilde{Q}(A_k, M)$ est nilpotente, ce qui prouvera le point 2 grâce au lemme 3.

Rappelons que $P(A)^m = 0$. Alors, $P(A_k)^m = \left(P(A)^{2^k} B_k\right)^m = (P(A)^m)^{2^k} B_k^m = 0$ car tout commute. D'où $P'(A_k)$ est nilpotente donc $M = -P(A_k)P'(A_k)^{-1}$ aussi car $P(A_k)$ et $P'(A_k)^{-1}$ commutent car sont des polynômes en A , puis de même, $M\tilde{Q}(A_k, M)$ est nilpotente, et cela achève la preuve par récurrence.

On a donc une suite bien définie qui vérifie les 3 points. Maintenant, comme $P(A)$ est nilpotente, on a que $P(A_k) = P(A)^{2^k} B_k$ vaut 0 à partir d'un certain rang, et donc la suite $(A_k)_k$ est stationnaire de valeur $D \in \mathbb{K}[A]$ à partir d'un certain rang k_0 . On a donc $P(D) = P(A_{k_0}) = 0$ donc D est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

$$\text{Posons maintenant } N = A - D = A_0 - A_{k_0} = \sum_{i=0}^{k_0} (A_i - A_{i+1}) = - \sum_{i=0}^{k_0} P(A_k)P'(A_k)$$

N est une somme de matrices nilpotentes qui commutent, donc elle est nilpotente.

Prouvons maintenant l'unicité : supposons qu'on ait un autre couple (D', N') de $M_n(\mathbb{K})$ avec D' diagonalisable et N' nilpotente, qui commutent, et $A = D' + N'$.

D' commute avec D' et N' donc avec $A = D' + N'$, et de même pour N' .

$D' + N' = D + N$ donne $D' - D = N - N'$. Comme D' commute avec A et $D \in \mathbb{K}[X]$, D' commute avec D , d'où $D' - D$ est diagonalisable. De même, $N - N'$ est nilpotente. on a alors $D' - D = N - N' = 0$, d'où l'unicité. $\square$

Remarque : On peut généraliser le résultat comme suit :

Théorème 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe un unique couple (D, N) où $D \in M_n(\mathbb{K})$ est semi-simple et $N \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente telle que $DN = ND$ et $A = D + N$. De plus, $D, N \in \mathbb{K}[A]$.

Rappelons qu'une matrice est semi-simple si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable, ce qui équivaut à dire que cette matrice est diagonalisable dans une extension de corps de $\mathbb{K}$.

Démonstration. On considère $\mathbb{L}$ le corps de décomposition de χ_A sur $\mathbb{K}$. Alors le résultat et la preuve du théorème 1 sont valables sur $\mathbb{L}$. Or on constate qu'en fait, $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A} \in \mathbb{K}[X]$, et pas seulement $\mathbb{L}[X]$, car le pgcd ne dépend pas du corps choisi puisqu'il nous vient par exemple de l'algorithme d'Euclide. On a alors que D est diagonalisable sur $\mathbb{L}$ donc semi-simple. $\square$