Calbro-germoni
(à partir de $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{C})$ p.273 mais adapté suivant l'action de l'ex. p.274.

$PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$:

Thm: $PSU_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$.

dém: ① Lemme : (admis) : $SU_2(\mathbb{C})$ est une sous-variété réelle de $M_2(\mathbb{C})$ et $T_{I_2}\,SU_2(\mathbb{C}) = \{H \in M_2(\mathbb{C}),\ H + {}^t\bar{H} = 0 \text{ et } Tr(H) = 0\}$

Soit $V = \{X \in M_2(\mathbb{C}),\ X \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}) \text{ et } Tr(X) = 0\}$.

Alors l'application $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(V)$, $A \mapsto (X \mapsto AXA^{-1})$ est bien définie, en effet si $X \in V$, alors $Tr(AXA^{-1}) = 0$

et ${}^t\overline{AXA^{-1}} = {}^t\bar{A}^{-1}\,{}^t\bar{X}\,{}^t\bar{A}$

$= AXA^{-1}$ car ${}^t\bar{A} = A^{-1}$

De plus φ est bien un morphisme de groupes.

② Soit $X = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & -a \end{pmatrix} \in V$, alors $\det X = -(a^2+c^2+d^2)$ donc det est une forme quadratique définie négative sur V.

Comme $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$, alors les applications $\varphi(A)$ avec $A \in SU_2(\mathbb{C})$ sont orthogonaux pour cette forme quadratique (on envoie une bon. de V sur une bon. de V).

On a donc $\varphi(SU_2(\mathbb{C}))$ est un sous-groupe de $O(\det) \simeq O_3(\mathbb{R})$

$SU_2(\mathbb{C})$ étant connexe et φ continue alors $\varphi(SU_2(\mathbb{C}))$ est un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$.

③ Mq $SO_3(\mathbb{R}) \subset \varphi(SU_2(\mathbb{C}))$:

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{L}(V)$

L'application φ est différentiable et $d\varphi_{I_2} : T_{I_2}\,SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow T_{I_3}\,SO_3(\mathbb{R}) = \{H \in M_3(\mathbb{R}),\ \underbrace{Tr(H)=0}_{\text{inutile}},\ H + {}^tH = 0\}$

par $d\varphi_{I_2}(H) \in M_3(\mathbb{R})$ par $d\varphi_{I_2}(H)(X) = HX - XH$

Si $H \in Ker(d\varphi_{I_2})$, alors $d\varphi_{I_2}(H)(X) = 0$ pour tout $X \in V$

Un calcul simple donne $H = 0$ et $Ker(d\varphi_{I_2}) = \{0\}$.

Mais $T_{I_2}\,SU_2(\mathbb{C})$ et $T_{I_3}\,SO_3(\mathbb{R})$ sont deux $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 donc

$d\varphi_{I_2}$ est un isomorphisme.

④ φ réalise donc, d'après le théorème d'inversion locale, un difféomorphisme d'un voisinage U de I_2 dans $SU_2(\mathbb{C})$ vers un voisinage V de I_3 dans $SO_3(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Im}(\varphi)$ étant un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \bigcup\limits_{g \in \mathrm{Im}(\varphi)} gV$ est ouvert.

Comme $SO_3(\mathbb{R}) = \bigsqcup\limits_{g \in SO_3(\mathbb{R})/\mathrm{Im}(\varphi)} g.\mathrm{Im}(\varphi)$ alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ est aussi fermé car de complémentaire $\bigsqcup\limits_{\substack{g \in SO_3(\mathbb{R})/\mathrm{Im}(\varphi) \\ g \neq 1}} g.\mathrm{Im}(\varphi)$ ouvert.

$SO_3(\mathbb{R})$ étant connexe, il vient $\mathrm{Im}(\varphi) = SO_3(\mathbb{R})$.

⑤ Finalement, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\pm I_2\}$ (calculs simples)

d'où l'isomorphisme $\underline{PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})}$.

<u>Rmqs:</u> ① $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe car est engendré par les retournements (cf gén. de $O(E)$ en développement).

② <u>Démontrons le lemme :</u> $SU_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété réelle de $GL_n(\mathbb{C})$.

Montrons le résultat au voisinage de I_n :

Soit W un voisinage de I_n tq $\det(W) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \emptyset$.

Soit $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow]-\pi, \pi[$ la détermination principale de l'argument.

En définissant sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R} + i]-\pi,\pi[$

$$z \longmapsto \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$$

alors Log est bijective d'inverse $\exp$ sur $\mathbb{R}+i]-\pi,\pi[$ qui est C^∞ et ne s'annule pas.

Log et Arg sont donc différentiables et $d\,\mathrm{Arg}_1(h) = d(\mathrm{Im} \circ \exp^{-1})_1(h) = \underbrace{(d\,\mathrm{Im})_0}_{\text{linéaire}} \circ (d\exp_0)^{-1}(h)$
$= \mathrm{Im}(h)$

d'où si $H \in M_n(\mathbb{C})$, $d(\mathrm{Arg} \circ \det)_{I_n}(H) = d\,\mathrm{Arg}_1(d\det_{I_n}(H)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}(H))$

Regardons $g : W \longrightarrow \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}$, alors $dg_{I_n}(H) = ({}^t\bar{H} + H, \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}(H)))$ qui est surjective
$M \longmapsto (M\,{}^t\bar{M}, \mathrm{Arg}(\det(M)))$

car $dg_{I_n}\left(\frac{1}{2}\underset{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})}{A} + \frac{i\overset{\in\mathbb{R}}{\lambda}}{n} I_n\right) = (A, \lambda)$

et W est une sous-variété.

De plus, $\mathrm{Ker}(dg_{I_n}(H)) = T_{I_n}W = \{H \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{H} + H = 0,\ \mathrm{Tr}(H) \in i\mathbb{R}$ ($=0$ en fait)$\}$