Dual de $\mathcal{M}_n(K)$ (Caldero, CVA.)

Recasages : 159

$K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Théorème : L'application $f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)^*$
$$A \mapsto f_A : \mathcal{M}_n(K) \to K$$
$$M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$$
est un isomorphisme.

Preuve : f est linéaire. De plus, $\dim(\mathcal{M}_n(K)) = \dim(\mathcal{M}_n(K)^*) = n^2 < +\infty$ donc il suffit de montrer que f est injective.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $f_A = 0$. Alors : $\forall M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{Tr}(AM)=0$

En particulier, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\mathrm{Tr}(AE_{i,j})=0$. Or,
$$\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (AE_{i,j})_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\, \delta_{i,j} = a_{i,j} = 0$$

Donc $A=0$ et f est injective donc f est bijective.

Lemme : Les matrices A qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ sont exactement les matrices scalaires.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(K)$, $AM=MA$.

En particulier, pour tous $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.

Or, $AE_{i,j} = \begin{pmatrix} & a_{1,j} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{n,j} & \end{pmatrix}$ et $E_{i,j}A = \begin{pmatrix} & (0) & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & (0) & \end{pmatrix}$

Donc le seul coefficient éventuellement non nul est $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc : $\exists \lambda \in K$, $A = \lambda I_n$ et réciproquement, toute matrice scalaire commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

Corollaire : Soit $f : \mathcal{M}_n(K) \to K$ une forme linéaire. Si f est telle que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$, $f(XY) = f(YX)$, alors : $\exists \lambda \in K$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(K)$, $f(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{M}_n(K)^*$. $\exists A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(K)$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$

De plus : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(AYX) = \mathrm{Tr}(XAY)$

Donc $Tr(AXY) - Tr(XAY) = 0 = Tr((AX - XA)Y)$ et comme celui est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(K)$, par injectivité de l'application posée dans le théorème, $AX - XA = 0$ donc A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ donc A est scalaire.
Ainsi : $\exists \lambda \in K,\ A = \lambda I_n$ et donc : $\forall X \in \mathcal{M}_n(K),\ f(X) = Tr(\lambda X) = \lambda Tr(X)$.

Corollaire : Si $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Preuve : On suppose $n \geq 2$. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$.
$\exists \varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*,\ H = \ker(\varphi)$. D'après le théorème précédent,
$\exists A \in \mathcal{M}_n(K),\ \forall X \in \mathcal{M}_n(K),\ \varphi(X) = Tr(AX)$.
Il suffit de trouver $X \in GL_n(K)$ tel que $Tr(AX) = 0$.
En notant $r = rg(A)$, il existe $P, Q \in GL_n(K)$, $A = PJ_rQ$ où $J_r = diag(I_r, I$
$\forall X \in \mathcal{M}_n(K)$, on a :

$Tr(AB) = Tr(BA)$ avec $A = P$ et $B = J_rQX$

$$Tr(AX) = Tr(PJ_rQX) = Tr(J_rQXP)$$

Il suffit de trouver $Y \in GL_n(K)$ telle que $Tr(J_rY) = 0$ et en posant $X = Q^{-1}YP^{-1}$, on aura $X \in H \cap GL_n(K)$.
Par exemple, on pose :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} det(Y) = (-1)^{n-1} \neq 0 \\ Tr(J_rY) = 0 \end{array}$$

→ on développe par rapport à la $1^{ère}$ ligne.