

Théorème de Burnside

(Romaldi)

Recommandations: 153, (106)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie avec K algébriquement clos de caractéristique nulle.

Lemme: $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Tr}(u^k) = 0$

Preuve: " $\Rightarrow$ " Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, u^k est nilpotent donc trigonalisable avec comme seule valeur propre 0 donc de trace nulle.

" $\Leftarrow$ " Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Tr}(u^k) = 0$. S'il existe des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ ($p \in \llbracket 1; n \rrbracket$), on a alors $\text{Tr}(u^k) = 0 = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^k$ pour $1 \leq k \leq p$.

La matrice de ce système de p équations à p inconnues α_j est une matrice de type Vandermonde de déterminant:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^p \lambda_j \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^p \lambda_j \prod_{1 \leq i < j \leq p-1} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

donc tous les α_j sont nuls. Donc 0 est la seule valeur propre de u donc u est nilpotent.

Lemme: Soient G un sous-groupe de $GL(E)$, $F = \text{Vect}(G)$, $\mathcal{B} = (u_i)$ une base de F extraite de G et $\varphi: G \rightarrow K^p$
 $u \mapsto (\text{tr}(u \circ u_1), \dots, \text{tr}(u \circ u_p))$

Soient $u, v \in G$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $u \circ v^{-1} - \text{Id}$ est nilpotent.
Si tous les éléments de G sont diagonalisables, φ est injective.

Preuve: Si $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors $\text{tr}((u-v) \circ u_j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Donc: $\forall w \in F$, $\text{tr}((u-v) \circ w) = 0$. D'où: $\forall w \in F$, $\text{tr}((u \circ v^{-1} - \text{Id}) \circ w \circ w) = 0$

Comme $w \mapsto w \circ w$ est une bijection de G dans G , on a:

$$\forall w \in F, \text{tr}((u \circ v^{-1} - \text{Id}) \circ w) = 0$$

$u \circ v^{-1} \in G$ et: $\forall w \in G$ $\text{tr}(u \circ v^{-1} \circ w) = \text{tr}(w)$

En particulier, $\text{tr}(u \circ v^{-1}) = \text{tr}(\text{Id}) = n$ et par récurrence: $\text{tr}((u \circ v^{-1})^k) = n$.

Il en résulte que: $\forall r \geq 1, \text{tr}((uov^{-1} - \text{Id})^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \text{tr}((uov^{-1})^k)$
 $= m \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} = m(1-1)^r = 0$

Donc $uov^{-1} - \text{Id}$ est nilpotent.

Si tous les éléments de G sont diagonalisables, $uov^{-1} \in G$ et $uov^{-1} - \text{Id}$ aussi, donc $uov^{-1} = \text{Id}$ donc $u = v$.
donc aussi diagonalisable

Théorème (Burnside): Soit G un sous-groupe de $GL(E)$. L'ASSE:

- (1) G est fini (2) G est d'exposant fini (3) Tous les éléments sont diagonalisables et $\text{tr}(G)$ est fini

Preuve: "(1) $\Rightarrow$ (2)" C'est Lagrange.

"(2) $\Rightarrow$ (3)" $\exists m \geq 1, \forall u \in G, u^m = \text{Id}$. Donc $X^m - 1$ annule u pour tout $u \in G$.

$\rightarrow$ Celui-ci est scindé à racines simples dans K donc u est diagonalisable.

Les valeurs propres de tout $u \in G$ sont racines de $X^m - 1$, elles sont donc en nombre fini lorsque u décrit G . Donc $\text{tr}(G)$ est fini.

"(3) $\Rightarrow$ (1)" Par le lemme précédent $G \cong \mathcal{G}(G)$ partie finie ($\text{tr}(G)$ fini) de K donc G est fini.