

Indécomposabilité de la loi de Poisson

(Queffelec)
Anal. Comp.
p. 424

Recosages: 261, 264, 266

Théorème: Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $Z := X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors, X et Y suivent séparément une loi de Poisson.

Preuve: $\forall z \in D(0, 1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = G_X(z)$ où $p_n = P(X=n)$
et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = G_Y(z)$ où $q_n = P(Y=n)$
 $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $G_Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{\lambda(z-1)}$

Par indépendance X et Y , $f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$, c'est-à-dire:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

Par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes et unicité du développement en série entière:

$$p_0 q_0 = e^{-\lambda} \text{ donc } p_0 \neq 0 \text{ et } q_0 \neq 0. \forall n \in \mathbb{N}, p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \dots + p_n q_0 = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\text{Donc } p_0 q_n \leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \text{ d'où } q_n \leq e^{-\lambda} p_0^{-1} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\text{De même: } \exists C_2 > 0, p_n \leq C_2 \frac{\lambda^n}{n!}$$

Par comparaison, f et g ont un rayon de convergence infini donc f, g sont dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$$\text{De plus, } G_Z \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ et: } \forall z \in D(0, 1), f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Par le principe du prolongement analytique,

$$f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Il reste à identifier ces deux fonctions. f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$
 $\exists F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), f = e^F$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = r \geq 1, |f(z)| \leq f(|z|) = f(r)$$

$$\text{De plus, } q_0 f(r) \leq g(r) f(r) = e^{\lambda(r-1)}$$

$$\text{donc } f(r) \leq \underbrace{q_0^{-1}}_{C > 0} e^{-\lambda} e^{\lambda r}$$

$$|f(z)| = |e^{F(z)}| = e^{\operatorname{Re}(F(z))} \text{ donc } e^{\operatorname{Re}(F(z))} \leq Ce^{\lambda r}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(F(z)) \leq \ln(C) + \lambda r$$

En notant $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ on a : en considérant les n négatifs et en multipliant par z^n

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) e^{-int} dt \text{ et } 0 = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} \overline{F(re^{it})} e^{-int} dt$$

En sommant, on obtient $a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re}(F(re^{it})) e^{-int} dt$ (*)

Donc : $|a_n| \leq \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} 2 |\operatorname{Re}(F(re^{it}))| dt$
 $\leq \frac{2(|\ln(C)| + \lambda r)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall n \geq 2$

Donc : $\forall n \geq 2, a_n = 0$ donc : $\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = a_0 + a_1 z$ et $f(z) = e^{a_0 + a_1 z}$

$f(1) = e^{a_0 + a_1} = 1$ donc grâce à translater F de $2ik\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on peut supposer $a_0 + a_1 = 0$ i.e $a_0 = -a_1$.

$f(z) = e^{a_1(z-1)}$ et $f'(z) = a_1 e^{a_1(z-1)}$ donc $f'(1) = a_1 = E[X] > 0$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, $X \sim P(a_1)$

De la même manière : $\exists b_1 > 0, Y \sim P(b_1)$. On a $a_1 + b_1 = \lambda$.

Remarque : Pour $f \in H(\mathbb{C}), \exists F \in H(\mathbb{C}), f = e^F$ (f ne s'annule pas)

Preuve : f' est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et on peut considérer une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$ de $\frac{f'}{f}$ (en primitivant le DSE) :

$$(f e^{-G})' = f' e^{-G} - \frac{f'}{f} f e^{-G} = 0$$

Donc $\exists C \in \mathbb{C}^* f e^{-G} = C$. De plus, $C = e^x$ par surjectivité de $\exp$ sur $\mathbb{C}^*$

Donc $f = e^{x+G}$. On pose $F = \log(C) + G \in H(\mathbb{C})$.

(*) On pose $M_n = \sup_{t \in [0; 2\pi]} \operatorname{Re}(F(re^{it})) < +\infty$

Où $a_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re}(F(re^{it})) - M_n) e^{-int} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_n e^{-int} dt$

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_n dt$$

Or, $F(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) dt \rightarrow \operatorname{Re}(F(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(re^{it})) dt$

Où $|a_n| \leq \frac{2(\ln(C) + \lambda r)}{n} - \frac{\operatorname{Re}(F(0))}{n}$