

Illustration du théorème des résidus

(Tameel)

Recasages : 236, 245

Lemme : Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ un pôle simple de f . Si f s'écrit sous la forme $f = \frac{g}{h}$ au voisinage de a , on a $\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Preuve : $\exists r > 0$, $D(a, r) \subset \Omega$, $\forall z \in \dot{D}(a, r)$, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g \in \mathcal{H}(D(a, r))$ et $h(z) = (z-a)k(z)$, $k(a) \neq 0$, k holomorphe. On a donc $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)k(z)} = \frac{1}{z-a} \left(\frac{g(z)}{k(z)} \right)$. $\exists r' \in]0, r[$, $\forall z \in D(a, r')$, $k(z) \neq 0$. $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z-a)^{k-1} \frac{g}{k}$ est holomorphe sur $D(a, r')$ donc

$$\exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in D(a, r'), \frac{g(z)}{k(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\text{Alors, } \forall z \in \dot{D}(a, r'), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-1}$$

$$\text{Res}(f, a) = c_0 = \frac{g(a)}{k(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n > \alpha + 1 > 0$. On a :

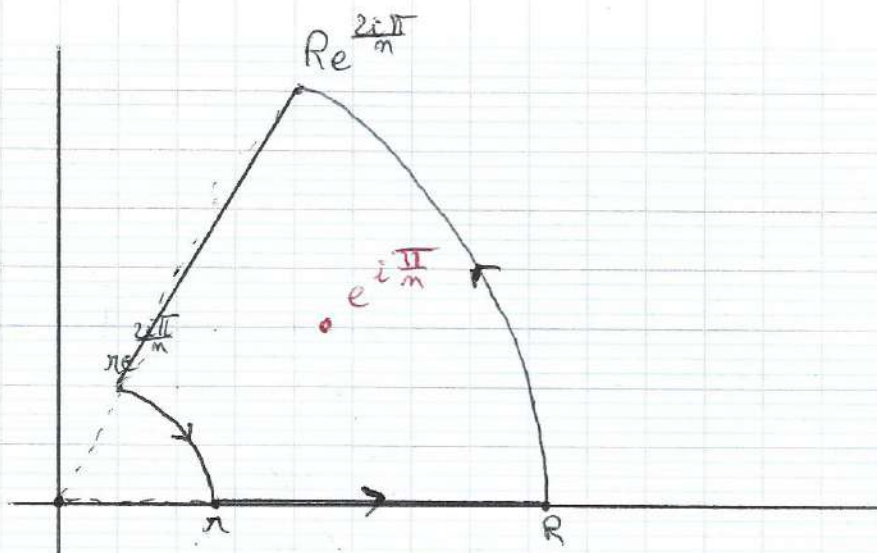
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{n}\right)}$$

Preuve : Montrons que I est bien définie. La fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^n}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc localement intégrable. De plus,

$f(t) \sim \frac{1}{t^{n-\alpha}}$ et $n-\alpha > 1$ donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On va utiliser le théorème des résidus afin de calculer I . Pour le mettre en place, on considère un chemin fermé contenant un pôle de $f: z \mapsto \frac{z^\alpha}{1+z^n}$ (disons $e^{i\frac{\pi}{n}}$), qui ne passe pas par 0 (à cause de z^α).

On considère le chemin $\Gamma_{n,R}$ ($0 < r < 1 < R$) suivant :



Puisque $\Gamma_{n,R}$ ne contient qu'un seul pôle de f , on a par le théorème des résidus:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{n,R}} f(z) dz &= 2i\pi \operatorname{Ind}_{\Gamma_{n,R}}(e^{i\pi/n}) \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/n}) \\ &= 2i\pi \times 1 \times \frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{n}}}{n e^{\frac{i\pi(n-1)}{n}}} = \frac{2i\pi}{n} e^{\frac{-i\pi n + i\pi(\alpha+1)}{n}} = -\frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}} \end{aligned}$$

De plus, $\int_{\Gamma_{n,R}} f(z) dz = \underbrace{\int_{\Gamma_1} f(z) dz}_{I_{1,R}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(z) dz}_{I_{2,R}} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} f(z) dz}_{I_{3,R}} + \underbrace{\int_{\Gamma_4} f(z) dz}_{I_{4,R}}$

On paramétrise Γ_1 et Γ_2 par: $\varphi_1: [0; \frac{2\pi}{n}] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\varphi_2: [0; \frac{2\pi}{n}] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{n,R}} f(z) dz &= \int_n^R \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt + iR^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}} dt - \int_R^n \frac{t^\alpha e^{\frac{2i\pi\alpha}{n}}}{1+t^n} dt - iR^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}} dt \\ &= (1 - e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}) I_{1,R} + iR^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}} dt - iR^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{i(\alpha+1)t}}{1+R^n e^{int}} dt \end{aligned}$$

Or, on a: $|I_1| \leq R^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{dt}{|R^n - 1|} = \frac{2\pi}{n} \frac{R^{\alpha+1}}{|R^n - 1|} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ (car $n > \alpha+1$)

$|I_2| \leq R^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{dt}{|R^n - 1|} = \frac{2\pi}{n} \frac{R^{\alpha+1}}{|R^n - 1|} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$ (car $\alpha+1 > 0$)

On peut donc passer à la limite et on obtient:

$$(1 - e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}) I = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\Gamma_{n,R}} f(z) dz = -\frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}$$

$$\text{D'où } I = -\frac{2i\pi}{n} \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi(\alpha+1)}{n}}} = \frac{2i\pi}{n} \frac{1}{e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}} - e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{(\alpha+1)\pi}{n})}$$

Remarque: Pour $\alpha=0$ et $n \geq 2$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n})}$