Par cinq points passe une conique

~~(Eiden, géométrie analytique classique)~~ Isenmann - Pecatte

Recasages : 171, 181, 191

Théorème : Soient A, B, C, D, E 5 points distincts d'un plan affine
1) Il existe une conique passant par ces points
2) La conique est unique si et seulement si 4 des points sont non alignés.
3) La conique est ~~non dégénérée~~ propre si et seulement si 3 points ne sont pas alignés.

Preuve : ① • Si les 5 points sont alignés, on prend l'union de la droite passant par les points et de n'importe quelle autre droite.
• Sinon, au moins 3 d'entre eux, disons A, B, C, forment un triangle non aplati donc un repère affine. Dans ce repère, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, $D(x_1, y_1, z_1)$, $E(x_2, y_2, z_2)$
Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation barycentrique ⊛ :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + pXY + qXZ + rYZ = 0$$

($\mathcal{C}$ passe par A, B, C) $\Rightarrow a = b = c = 0$
($\mathcal{C}$ passe par A, B, C) $\Leftrightarrow pXY + qXZ + rYZ = 0$
($\mathcal{C}$ passe par A, B, C, D, E) $\Leftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{l} px_1y_1 + qx_1z_1 + ry_1z_1 = 0 \\ px_2y_2 + qx_2z_2 + ry_2z_2 = 0 \end{array} \right.$ $\exists (p,q,r) \in \mathbb{R}^3$

Ce système a toujours au moins une solution non nulle, donc une telle conique existe ↳ $rg(S) \in \{1; 2\}$, l'ensemble des solutions est un sev de $\mathbb{R}^3$ (3 inconnues) de dimension $3 - rg(S)$ donc 1 ou 2.

② (La conique est unique) $\Leftrightarrow rg(S) = 2$
$rg(S) \leq 1 \Leftrightarrow$ tous les mineurs de taille 2 de $\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 \end{pmatrix}$ sont nuls

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1z_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1z_1 \\ x_2y_2 & y_2z_2 \end{vmatrix} = y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} x_1z_1 & y_1z_1 \\ x_2z_2 & y_2z_2 \end{vmatrix} = z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

→ Faire des dessins !

→ Préciser à chaque fois qu'on travaille dans (A,B,C)

Supposons que $rg(S) \leq 1$ i.e la conique n'est pas unique. Supposons que D et E ne sont ni sur (AB), ni sur (BC), ni sur (AC).

Ceci équivaut à $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \neq 0$ donc les mineurs 3×3 sont nuls donc $A\in(DE)$, $B\in(DE)$, $C\in(DE)$ ↯.

Pour fixer les idées, disons que $D\in(AB)$ i.e $z_1=0$. Comme $D\neq A$ et $D\neq$ ...

$x_1\neq 0$ et $y_1\neq 0$ donc $x_1y_1\neq 0$

$x_1y_1x_2z_2=0 \Leftrightarrow x_2z_2=0$ et $x_1y_1y_2z_2=0 \Leftrightarrow y_2z_2=0$

Si $z_2\neq 0$, $x_2=y_2=0$ donc $C=E$ ↯. Donc $z_2=0$ donc $E\in(AB)$ et A,B,D,E sont alignés.

Réciproquement, si 4 points sont alignés, l'union de la droite passant par les 4 points et de n'importe quelle autre droite passant par le 5e con...

...aduire la nullité des premiers mineurs 3×3 ... $z_1=0$

(3) $\mathscr{C}$ a pour équation $2(pXY+qXZ+rYZ)=0$. C'est le lieu d'annulat... de la forme quadratique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$ dans la base can. de $\mathbb{R}$...

$\mathscr{C}$ est ~~dégénérée~~ impropre $\Leftrightarrow pqr=0$

. Si $pqr=0$, disons $p=0$, alors $(\mathscr{C}) : Z(qX+rY)=0$

$(\mathscr{C}) \Leftrightarrow Z=0$ ou $qX+rY=0$ donc $\mathscr{C}$ est l'union de 2 droites et comme $(\mathscr{C})$ passe par A,B,C,D,E, 3 d'entre elles sont alignés.

. Si 3 points sont alignés, disons A,B,D ; on pose $D=(x,y,0)$ avec $xy\neq 0$. Comme $D\in\mathscr{C}$, $pxy=0$ donc $p=0$ donc $pqr=0$ donc $\mathscr{C}$ est dégénérée.

...réciser que ... conique est unique ! ... il n'y a pas 4 points alignés

(4) Passage d'une équation cartésienne à une équation barycentrique :

. Cartésien : $\alpha_1 U^2+\alpha_2 UV+\alpha_3 V^2+\beta_1 U+\beta_2 V+\gamma=0$

On pose $U=\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ et $V=\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ (passage en barycentrique)

$\alpha_1 Y^2+\alpha_2 YZ+\alpha_3 Z^2+(\beta_1 Y+\beta_2 Z)(X+Y+Z)+\gamma(X+Y+Z)^2=0$

→ On développe pour avoir :

. Barycentrique : $aX^2+bY^2+cZ^2+pXY+qXZ+YZ=0$

De même, on repasse de la forme barycentrique à la forme cartésienne en divisant par $(X+Y+Z)^2$ et en posant

$U=\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ $V=\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ et $1-U-V=\dfrac{X}{X+Y+Z}$.