

Nombre de dérangements de S_n

(Gourdon, Génie)
(CPA no.)

Francis
Groupe X-EVS 1

Recasages: 105, 190, (243)

Définition: On appelle dérangement de S_n toute permutation $\sigma \in S_n$ sans point fixe: $\text{Supp}(\sigma) = \{1; n\}$. On note D_n le nombre de dérangements de S_n .

Proposition: On a $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$. On montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$
d'où $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Preuve: Posons $E_{n,k} = \{\sigma \in S_n, \sigma \text{ a exactement } k \text{ points fixes}\}$, $k \in \{0; n\}$
On a $S_n = \bigcup_{k=0}^n E_{n,k}$ donc $n! = \sum_{k=0}^n \#E_{n,k}$.

Or, $\#E_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k}$ correspondant au choix des k points fixes et $n-k$ points qui ne sont pas fixes (qui correspondent au choix d'un dérangement de S_{n-k}).

D'où effectivement $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

On s'intéresse à $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{D_n}{n!} \leq 1$ donc

$\left| \frac{D_n}{n!} x^n \right| \leq |x|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or, $\sum x^n$ converge absolument sur $] -1; 1[$ donc le rayon de convergence de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Étudions $f: x \in] -1; 1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$

$$e^x f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$\text{avec } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = 1$$

$$\text{Donc } f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right), \text{ d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Proposition: Soit P la probabilité uniforme sur $(\mathcal{S}_n, P(\mathcal{S}_n))$. Soit F_n la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a

$$\forall r \in [0, n], P(F_n = r) = \frac{\binom{n}{r} D_{n-r}}{\# \mathcal{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Preuve: $P(F_n = r) = \frac{\#E_{n,r}}{\# \mathcal{S}_n} = \frac{\binom{n}{r} D_{n-r}}{n!} = \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$

Corollaire: En particulier, $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Loi}} P(1)$. De plus, $E[F_n] = \text{Var}(F_n) = 1$.

ajouter
éventuellement
 $(\sigma, P_n) \rightarrow P(1)$
à la fin

Preuve: $P(F_n = r) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{e^{-1}}{r!}$ donc $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Loi}} P(1)$.

On pose $\forall k \in [1, n], X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$F_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \text{donc } X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$E[F_n] = \sum_{k=1}^n E[X_k] = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

$$\text{Var}(F_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j], \quad \text{or, } X_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(X_i X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(F_n) &= n \times \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \frac{n(n-1)}{2} \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{n} + n(n-1) \left[\frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$