

Déterminant de Gram (Grafone + Gaudon)

Recherches: 149, (151) 16.1

Proposition: On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre dans E . On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Soit $x \in E$.

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)} \quad \text{où } G(x_1, \dots, x_p) \text{ est le déterminant de la matrice de Gram } (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$$

Preuve: Soit $x \in E$. On note $\Gamma = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$

$$G(x_1, \dots, x_p, x) = \begin{vmatrix} \Gamma & \begin{matrix} \langle x_1 | x \rangle \\ \vdots \\ \langle x_p | x \rangle \end{matrix} \\ \langle x | x_1 \rangle \dots \langle x | x_p \rangle & \langle x | x \rangle \end{vmatrix}$$

Soit $y = P_F(x)$. $\|x - y\| = d(x, F)$ et $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$

$$G(x_1, \dots, x_p, x) = \begin{vmatrix} \Gamma & \begin{matrix} \langle x_1 | x \rangle \\ \vdots \\ \langle x_p | x \rangle \end{matrix} \\ \langle x | x_1 \rangle \dots \langle x | x_p \rangle & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

$$G(x_1, \dots, x_p, x) = G(x_1, \dots, x_p, y) + \begin{vmatrix} \Gamma & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \dots & \|x - y\|^2 \end{vmatrix}$$

$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \langle x - y | x_i \rangle = 0$ car $x - y \in F^\perp$
 $\Rightarrow \langle x | x_i \rangle = \langle y | x_i \rangle$

et $G(x_1, \dots, x_p, y) = 0$ car $y \in F$ donc y est combinaison linéaire des x_i

$= \|x - y\|^2 G(x_1, \dots, x_p)$ en développant par rapport à la dernière colonne

$$\text{Donc } \|x - y\|^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)} = d(x, F)^2.$$

Proposition (Inégalité de Hadamard): Soit $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$. Alors

$$G(x_1, \dots, x_m) \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$$

Si $E = K^n$, $|\det(x_1, \dots, x_m)| \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|_2$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On a égalité si et seulement si $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.

Preuve: Par récurrence sur $n \geq 1$.

• Pour $n=1$, $G(x_1) = \langle x_1 | x_1 \rangle = \|x_1\|^2$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang n .

→ S'ils sont liés ✓
→ On les suppose libres -

Soit $(x_1, \dots, x_{m+1}) \in E^{m+1}$.

$$G(x_1, \dots, x_{m+1}) = G(x_1, \dots, x_m) \|x_{m+1} - y\|^2 \quad \text{où } y = P_F(x_{m+1}), F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$$

$$\stackrel{\text{HR}}{\leq} \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2 \|x_{m+1} - y\|^2$$

$$= \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2 (\|x_{m+1}\|^2 - \|y\|^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } x_{m+1} = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{x_{m+1} - y}_{\in F^\perp} \\ \rightarrow \text{Pythagore} \end{array} \right\}$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m+1} \|x_i\|^2$$

Il y a égalité si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_m) \text{ est orthogonal (HR)} \\ y=0 \text{ i.e. } x_{m+1} \in F^\perp \end{array} \right.$
i.e. $(x_1, \dots, x_{m+1})$ est orthogonal.

Si $E = K^n$, soit M la matrice dont les colonnes sont les $x_1, \dots, x_n$ dans la base canonique.

$$|\det(x_1, \dots, x_n)|^2 = \det(M)^2 = \det({}^t M M) = \det((x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq n})$$

→ produit scalaire usuel

$$\leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2^2$$

→ Détail du cas d'égalité:

On suppose $(x_1, \dots, x_{m+1})$ libre.

• Si $G(x_1, \dots, x_{m+1}) = \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$, alors $G(x_1, \dots, x_{m+1}) = \|x_{m+1} - y\|^2 \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$
par Gram $= d(x_{m+1}, F)^2 G(x_1, \dots, x_m)$

→ car toutes les inégalités sont des égalités.

Donc $G(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$ (car $x_{m+1} \notin F$). Par HR, les $(x_1, \dots, x_m)$ sont les orthogonaux.

Or, $G(x_1, \dots, x_m) d(x_{m+1}, F)^2 = G(x_1, \dots, x_{m+1}) = \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$ donc on a $\|x_{m+1}\|^2 = d(x_{m+1}, F)^2$ donc $x_{m+1} \in F^\perp$. (car $y=0$)

• Si $(x_1, \dots, x_{m+1})$ est orthogonale, alors:

$$G(x_1, \dots, x_{m+1}) = d(x_{m+1}, F)^2 G(x_1, \dots, x_m)$$

$$= \|x_{m+1}\|^2 \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2 \quad \text{par HR et car } x_{m+1} \in F^\perp$$

$$= \prod_{i=1}^{m+1} \|x_i\|^2$$