

Critère de Sylvester

(Romboldi)

Recherches: 157, 170, 171

Proposition: $A \in \mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Preuve: Soit $A \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$. Montrons que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$Ax = \lambda x \text{ et } \bar{A}\bar{x} = A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

$${}^t x A \bar{x} = {}^t x \bar{\lambda} \bar{x} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^m |x_i|^2$$

$${}^t x A \bar{x} = {}^t (Ax) \bar{x} = \lambda {}^t x \bar{x} = \lambda \sum_{i=1}^m |x_i|^2 \text{ donc } \lambda = \bar{\lambda} \text{ donc } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On prouve le résultat pour $\mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R})$ et il en est de même pour $\mathcal{Y}_m^+(\mathbb{R})$.

" $\Rightarrow$ " Soit $A \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit x un vecteur propre associé à λ . Alors:

$$\langle Ax | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle > 0 \text{ et comme } \langle x | x \rangle > 0, \text{ on a } \lambda > 0.$$

" $\Leftarrow$ " Soit $A \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$ constituée de vecteurs propres de A .

$$\langle Ax | x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i e_i \mid \sum_{j=1}^m x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2 > 0 \text{ donc } A \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R}).$$

Théorème (Sylvester): Soit $A \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$. Alors $A \in \mathcal{Y}_m^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Preuve: Soit $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^m)$ telle que $A = \text{Mat}_{(e_i)}(q)$, $q(x) = {}^t x A x$ pour $x \in \mathbb{R}^m$.

" $\Rightarrow$ " Supposons q définie positive sur $\mathbb{R}^m$. Pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de $q_k = q|_{E_k}$ où $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

q_k est définie positive, on a $\det(A_k) > 0$. En effet, la signature est $(k, 0)$ et par le théorème d'inertie de Sylvester,

$$\exists P \in \text{GL}_k(\mathbb{R}), A_k = {}^t P I_k P \text{ donc } \det(A_k) = \det(P)^2 > 0.$$

$\hookrightarrow$ q définie positive: $\forall x \in \mathbb{R}^m, q(x) > 0$

$$\text{donc: } \forall x \in E_k, q_k(x) = q(x) > 0.$$

" Par récurrence sur $n \geq 1$.

• Pour $n=1$, c'est clair : $E = \text{Vect}(e_1)$ et $q(x) = q(x_1 e_1) = \lambda x_1^2$, $\lambda = q(e_1) = \det A$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat acquis pour tous les $\mathbb{R}$ -espaces

Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{m+n})$. On se donne une base $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_{m+n})$ de $\mathbb{R}^{m+n}$ et on suppose que tous les mineurs principaux de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m+n}$ sont strictement positifs.

On pose $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$, $A_m = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ est la matrice de $q_m = q|_H$. Tous les mineurs principaux de A_m sont strictement positifs, q_m est définitive positive sur H (HR).

per def de
signature:
max(dim(F))
Fix de E
q|F > 0

$q|_H$ est définitive positive et q est non dégénérée ($\det(A) \neq 0$), donc la signature de q ne peut être que $(m, 1)$ ou $(m+1, 0)$

max(dim(F))
Fix de E
q|F < 0

Si c'est $(m, 1)$, alors on a une décomposition de Courant de la forme $q = \sum_{j=1}^m l_j^2 - l_{m+1}^2$ et la matrice de q dans une base q -orthogonale adaptée à cette réduction est $\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix} = D$. On a $\det(D) = -1$.

Donc q est de signature $(m+1, 0)$ et q est définitive positive.

• Par le principe de récurrence, la réciproque est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.