

Théorème de Lévy et Théorème Central Limite (Zuily - Quafflet)

Recorages: 218, 250, 261, 262, 266

Théorème (Lévy): Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \phi_X(t).$$

Preuve: " $\Rightarrow$ " Vrai par définition car $x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée.

" $\Leftarrow$ ": Cas où $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t) dt$ avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

$$E[f(X_n)] = E\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n} \varphi(t) dt\right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t) dt dP_{X_n}$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) E[e^{itX_n}] dt$$

$$\stackrel{\text{TCD}}{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) E[e^{itX}] dt = E[f(X)]$$

Cas où $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

$\Leftarrow \exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Y}(\mathbb{R})$, on a par linéarité

de F sur $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t) dt \quad \text{où } \varphi \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{Donc } |E[f(X_n) - f(X)]| \leq |E[(f - g)(X_n)]| + |E[g(X_n) - g(X)]| + |E[(g - f)(X)]|$$

$$\leq 2\|f - g\|_\infty + |E[g(X_n) - g(X)]|$$

$$\leq 3\varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand par le premier cas.}$$

$$\text{Donc } X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Théorème (Central Limite): Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors:

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z \quad \text{où } P_Z = \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve: On pose $\phi_Y(t) = E[e^{itY}]$ où $Y = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$, $Y \in L^2(\mathbb{R})$ donc ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et:

$$\phi_Y'(0) = iE[Y] = 0 \text{ et } \phi_Y''(0) = -E[Y^2] = -1$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } E\left[e^{it \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right] &= E\left[\prod_{k=1}^n e^{it \frac{X_k - \mu}{\sigma}}\right] \\ &= \prod_{k=1}^n E\left[e^{it \frac{X_k - \mu}{\sigma}}\right] \\ &= \phi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \end{aligned}$$

Un DL₂(0) de ϕ_Y à t fixé donne:

$$\phi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi_Y(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \phi_Y'(0) + \frac{t^2}{2n} \phi_Y''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ où } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\phi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{\varepsilon_n - \frac{t^2}{2}}{n}$$

Δ complexe
ce que:

$\varepsilon_n - \frac{t^2}{2} \notin \mathbb{R}$

Donc $\left(\phi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{\varepsilon_n - \frac{t^2}{2}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(*)} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi_Z(t)$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Donc par le théorème précédent, on a le résultat.

Pour la 218:

[2-2549]

Lemme: Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$. Alors $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^z$.

Preuve: Montrons que $e^z - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} z^k$ où les $a_k^{(n)} \geq 0$.

En effet, en utilisant le développement en série de Taylor des deux termes de la différence, on a:

$$e^z - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{k! n^k} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i) \right] z^k$$

$$\text{D'où } a_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \left[1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right] \text{ pour } k \leq n \text{ et } \frac{1}{k!} \text{ pour } k > n.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc si } r = |z|, \quad |e^z - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} r^k = e^r - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \\ &= e^r - e^{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)} \\ &\leq e^r - e^{n\left(\frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2}\right)} \\ &= e^r \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2n}}\right) \leq \frac{r^2}{2n} e^r \end{aligned}$$

Ainsi:

$$|e^z - \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n| \leq |e^z - e^{z_n}| + \frac{|z_n|^2 e^{|z_n|}}{2n} \leq |e^z - e^{z_n}| + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Proposition: On a $\phi_x(0) = 1$.

De plus, si x^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\phi_x^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$.
En particulier, $\phi_x'(0) = iE[X]$ et $\phi_x''(0) = -E[X^2]$.

Preuve: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_x$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On pose $h(x, t) = e^{itx}$. On a que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall j \in [0, k]$.

$$\frac{\partial^j h}{\partial t^j} = i^j x^j e^{itx} \quad P_x\text{-mesurable}$$

De plus, $\left| \frac{\partial^k h}{\partial t^k}(t, x) \right| \leq |x|^k$ qui est P_x -intégrable par hypothèse puis $x^k \in L^1$ donc $E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} |x|^k dP_x < \infty$.
 $x \mapsto |x|^k$ est aussi indépendante de t .

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_x^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k h}{\partial t^k}(x, t) dP_x = \int_{\mathbb{R}} i^k x^k e^{itx} dP_x$$

$$\text{Donc } \phi_x^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k dP_x = i^k E[X^k]$$