

Théorème de Stone - Weierstrass (Hirsch)

Recapitulage: 201, 203, 209, 228

Soit (X, d) un espace métrique compact contenant au moins 2 éléments.

Lemme: Soit $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que:

- a) $\forall u, v \in H, \sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$ (H réticulée)
 - b) Si $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H, \begin{cases} u(x_1) = \alpha_1 \\ u(x_2) = \alpha_2 \end{cases}$
- Alors, H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve: Soient $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On cherche à approcher f à ε près par un élément de H . Soit $x \in X$.

Par b), pour tout $y \neq x$, il existe $u_y \in H$ tel que $\begin{cases} u_y(x) = f(x) \\ u_y(y) = f(y) \end{cases}$

Soit $O_y = \{x' \in X \mid u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$. Pour tout $y \in X, y \neq x$, O_y est un ouvert contenant y et x donc $X = \bigcup_{y \neq x} O_y$ et par Borel-Lebesgue, $X = \bigcup_{j=1}^n O_{y_j}$ avec $y_j \neq x$ pour tout $j \in [1, n]$. Soit $x' \in X$. Si $x' = x$, on prend $y = x$. Si $x' \neq x$, on prend $y = x'$.

Soit alors $v_x = \sup(u_{y_1}, \dots, u_{y_n})$. On a $v_x \in H$ (par a))

$$v_x(x) = f(x) \text{ et } \forall x' \in X, v_x(x') > f(x') - \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ car $v_x(x) = f(x)$ et car $\forall x' \in X, \exists j \in [1, n], x' \in O_{y_j}$ et $v_x(x') \geq u_{y_j}(x') > f(x') - \varepsilon$

On fait varier x et on pose pour tout $x \in X, \Omega_x = \{x' \in X \mid v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. Ω_x est un ouvert de X contenant x . Par Borel-Lebesgue,

$$\exists x_1, \dots, x_p \in X, X = \bigcup_{i=1}^p \Omega_{x_i}. \text{ Soit } v = \inf(v_{x_1}, \dots, v_{x_p})$$

Alors $v \in H$ et $f - \varepsilon < v < f + \varepsilon$ i.e. $\|f - v\| \leq \varepsilon$

$\downarrow$
car $v_x(x) = f(x) \forall x \in X$ réticulé

Théorème: Si H est un sous-espace vectoriel réticulé de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve: Il suffit de vérifier b dans le lemme.

Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. Comme H est séparant, il existe $h \in H, h(x_1) \neq h(x_2)$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

le système $\begin{cases} \lambda h(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda h(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$ admet une unique solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour ce (λ, μ) , on voit que $(\lambda h + \mu)(x_1) = \alpha_1$ et $(\lambda h + \mu)(x_2) = \alpha_2$ et $\lambda h + \mu \in H$.

Théorème (Stone-Weierstrass réel): Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve: Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes, alors il en est de même de son adhérence $\bar{H}$. Il suffit donc de montrer que $\bar{H}$ est réticulée et d'appliquer le théorème.

Soit $f \in \bar{H}$, $f \neq 0$. Il existe $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions polynomiales à coefficients réels convergent uniformément sur $[-1, 1]$ vers $x \mapsto |x|$. Mais alors $(p_n \frac{f}{\|f\|_n})_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers $\frac{|f|}{\|f\|_\infty}$ et donc $|f|$ est la limite uniforme de $\|f\|_n p_n(\frac{f}{\|f\|_n})$. Comme $\bar{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, tous les termes de cette suite sont des éléments de $\bar{H}$ donc $|f| \in \bar{H}$. Ainsi, $\bar{H}$ est réticulée.

Construction de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$p_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1, 1]$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n(x)^2)$

Par récurrence, on montre que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$

Hérédité: $0 \leq p_{n+1}(x) \leq p_{n+2}(x) = |x| - (|x| - p_{n+1}(x))(1 - \frac{1}{2}(|x| + p_{n+1}(x))) \leq |x|$

(p_n) est $\nearrow$ bornée donc CV simplement vers f telle que $\forall x \in [-1, 1]$, $0 \leq f(x) \leq |x|$ et $f(x)^2 = x^2$

Donc $f(x) = |x|$ et par Dini, la CV est uniforme.

Preuve de Dini: $\varepsilon > 0$, X compact, (f_n) suite croissante de fonctions continues telle que $f_n \xrightarrow{\text{CV}} f$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$. Ω_n est une suite croissante d'ouverts donc la réunion est X . Par Borel-Lebesgue, $\exists N \in \mathbb{N}$, $X = \Omega_N$. Donc: par la CVS

$\forall n \geq N$, $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ donc $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ d'où la CV.