

Théorème de Fejér (El Amrani Fournier)

Recherches: 209, 246

Théorème (Fejér): (1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.

(2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [1, \infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

Preuve. (1) On a $\sigma_N(f) = f * K_N$ où K_N est le noyau de Fejér, $K_N \in L^1_{2\pi}$, donc $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty$.

Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, f est uniformément continue donc:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}, |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0, \eta$ associé. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \right| \text{ car } \|K_N\|_1 = 1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \eta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) dt}_{\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0} \end{aligned}$$

Où pour N assez grand,

$$\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \varepsilon.$$

(2) Soit $f \in L^p_{2\pi}$.

$$|\sigma_N(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \right|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t)^{\frac{1}{p}} K_N(t)^{\frac{p-1}{p}} dt \right|^p$$

règle de Hölder $\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt \right)^{p-1}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \|\sigma_N(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p dx \right] dt \quad (\text{Fubini-Tonelli})^{-1} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right] dt \\ &= \|K_N\|_1 \|f\|_p^p = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

Où $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$.

On a en fait pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - \sigma_N(f)(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p dx \right] dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \|T_t f - f\|_p^p dt \end{aligned}$$

Par continuité des petites translations, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists \delta > 0, |t| < \delta \Rightarrow \|T_t f - f\|_p^p < \varepsilon$$

Pour un tel δ ,

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t) \|T_t f - f\|_p^p dt + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) \|T_t f - f\|_p^p dt \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_p \varepsilon \quad \text{pour } N \text{ assez grand} \end{aligned}$$

Théorème: (1) Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = l \right) \Rightarrow (l = f(x_0))$$

(2) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$

Preuve: (1) $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N(f)(x_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x_0) = l$ (Césaire)
et d'après le théorème de Fejér,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N(f)(x_0) = f(x_0)$$

Par unicité de la limite, on déduit que $l = f(x_0)$.

(2) Pour chaque x , la suite numérique $(S_N(f)(x))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Donc: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$.
D'où le théorème.