Équation de Bessel — Francinou 4

Recasages 220, 221, (243)

Théorème : Soit l'équation (E) : $xy''+y'+xy=0$

1) (E) admet des solutions développables en série entière en 0 de la forme
$f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$

Preuve :

1) Soit f une solution développable en séries entières en 0. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R>0$ tels que pour tout $x\in\,]-R;R[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
Alors, pour tout $x\in\,]-R;R[$,

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$xf''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^n,\text{ et donc :}$$

$$xf''(x)+f'(x)+xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2n+1}a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n=0$$

D'après l'unicité du développement en série entière, il faut :

$$\begin{cases}a_1=0\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)^2a_{n+1}=-a_{n-1}\end{cases}$$

(*) On en déduit (par récurrence) que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n+1}=0$ et
$a_{2n}=\frac{(-1)^na_0}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots2^2}=\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}$. On a donc pour tout $x\in\,]-R;R[$,
$f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$.

Réciproquement, cette série entière a un rayon de convergence infini (règle de D'Alembert) et définit une fonction f DSE dont les coefficients vérifient les conditions précédentes ; f est donc solution de l'équation différentielle.

Théorème : 2) Soit f_0 la solution développable en série entière au bord de 0 telle que $f(0)=1$ et f une solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]0;a[$. Alors, (f,f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0.

Preuve : f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0
Donc si (f, f_0) est liée, alors f est bornée au voisinage de 0
Supposons que (f, f_0) est libre. Sur $]0;a[$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, qui peut être écrite $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont (f, f_0) est une base.
Considérons le Wronskien $W = ff_0' - f'f_0$. Pour tout $x \in]0;a[$,

$$W'(x) = f(x)f_0''(x) - f_0(x)f''(x) = -\frac{1}{x}W(x)$$

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0;a[$, $W(x) = Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$
et $C \neq 0$ car (f, f_0) est libre.
On a donc, pour tout $x \in]0;a[$, $f(x)f_0'(x) - f_0(x)f'(x) = \frac{C}{x}$
Supposons f bornée au voisinage de 0. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = 1$ et

Série entière ← $\lim\limits_{x \to 0} f_0'(x) = 0$, alors $f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}$. ↳ car pas $\lim\limits_{x\to 0}$ de f. !

Soit $b \in]0;a[$. La fonction $x \mapsto -\frac{C}{x}$ garde un signe constant sur $]0;b]$ et n'est pas intégrable sur $]0;b]$. On en déduit que :

↓

CV normale sur les compacts

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\,dt \sim -C\int_b^x \frac{1}{t}\,dt = -C(\ln(x) - \ln(b))$$

↓

Double limite

On a donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C\ln(x)$ puis $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ↯.
D'où le résultat.

(*) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}$ »
→ $n = 0$, $a_0 = a_0$ et $a_1 = 0$ ✓
→ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n.

$$(2n+3)^2 a_{2n+3} = -a_{2n+1} \underset{(HR)}{=} 0 \text{ donc } a_{2n+3} = 0$$

$$(2n+2)^2 a_{2n+2} = -a_{2n} = -\frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}$$

$$\text{D'où } a_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1} a_0}{4^n (n!)^2\, 2^2 (n+1)^2} = \frac{(-1)^{n+1} a_0}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$$

→ Par le principe de récurrence, P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.