

# Théorème des extrema liés

Avez (Calcul différentiel)

Recapitulé: 214, 219, 148, 159 (206)

Lemme: Soit  $v, u_1, \dots, u_k$  des formes linéaires sur  $E$  telles que  $u_1, \dots, u_k$  soient linéairement indépendantes et  $\bigcap_{i=1}^k \ker(u_i) \subset \ker(v)$ . Alors, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in K^k$  tel que  $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$

Preuve: On complète  $(u_1, \dots, u_k)$  en une base  $(u_1, \dots, u_m) = B^*$  de  $E^*$ . Soit  $B = (e_1, \dots, e_m)$  la base antédual de  $B^*$ . On a  $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i$ .  
 Pass  $\bigcap_{i=1}^k \ker(u_i) = \ker(e_{k+1}, \dots, e_m)$  donc pour tout  $i \in \{k+1, \dots, m\}$ ,  $e_i \in \ker(v)$ .  
 Donc  $v(e_i) = 0$ . Or,  $v(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j(e_i) = \lambda_i$  donc pour tout  $i \in \{k+1, \dots, m\}$ ,  $\lambda_i = 0$ .  
 Ainsi,  $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$ .

Théorème (Extrema liés): Soient  $f, g_1, \dots, g_p$  de classe  $C^1$ , de  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $M = \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$ . Si  $f|_M$  admet un extremum en  $a \in M$  et que  $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$  sont des formes linéaires linéairement indépendantes, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ ,  $df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a)$ .

Preuve: Soit  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Comme  $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$  sont linéairement indépendantes,  $dg(a)$  est surjective et  $g$  est une submersion. De plus,  $\tilde{U} \cap M = g^{-1}(\{0\})$  donc par le théorème de submersion,  $M$  est une sous-variété de dimension  $n-p$ . Soit alors  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \varphi(\tilde{U})$  un  $C^1$ -difféomorphisme tel que  $\varphi(\tilde{U} \cap M) = \varphi(\tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\})$ .  
 On peut supposer  $\varphi(a) = 0 \rightarrow$  Transit

① Montrons que  $T_a M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n-p$ . Pour cela, montrons que  $d\varphi(a)(T_a M) = \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ .

Soit  $v \in T_a M$ ,  $I$  intervalle ouvert centré en 0,  $\gamma: I \rightarrow M$  de classe  $C^1$  tels que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . Quitte à restreindre  $I$  on peut supposer que  $\forall t \in I, \gamma(t) \in \tilde{U} \cap M$ . Alors  $\forall t \in I, \varphi \circ \gamma(t) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$  et  $(\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(a)(v) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$  donc  $d\varphi(a)(T_a M) \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ .

② Soit  $v \in \mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ , soit  $I$  intervalle ouvert centré autour de 0 et

$\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^{m-p}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\eta(0)=0$  et  $\eta'(0)=v$  ( $t \mapsto tv$  convient)  
 Quitte à restreindre  $I$ , on peut supposer que:  $\forall t \in I, \eta(t) \in \mathcal{U}(v)$ . Soit  
 $\gamma = \psi^{-1} \circ \eta$ .  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\gamma(0) = \psi^{-1}(\eta(0)) = \psi^{-1}(0) = a$ . On a aussi  
 $\gamma'(0) = (\psi^{-1} \circ \eta)'(0) = d\psi^{-1}(\eta'(0)) = d\psi^{-1}(0)(v)$   
 Or,  $d\psi^{-1}(0) = (d\psi(\psi^{-1}(0)))^{-1}$  donc  $\gamma'(0) = d\psi(a)^{-1}(v)$  donc  $v = d\psi(a)(\gamma'(0))$   
 donc  $v \in d\psi(a)(T_a M)$  donc  $\mathbb{R}^{m-p} \times \{0\} \subset d\psi(a)(T_a M)$   
 Finalement, comme  $df(a)$  est inversible,  $T_a M \cong \mathbb{R}^{m-p} \times \{0\}$ .

② Montrons que  $T_a M = \ker(dg(a))$

On a  $\dim(\ker(dg(a))) = m-p$  car  $dg(a)$  est surjective. Donc  $\dim(\ker(dg(a))) =$   
 Montrons que  $T_a M \subset \ker(dg(a))$ . Soit  $v \in T_a M$ ,  $I$  intervalle ouvert centré  
 et  $\gamma: I \rightarrow U \cap M$   $\mathcal{C}^1$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$  (quitte à restreindre  $I$ ,  
 $\forall t \in I, g(\gamma(t)) = 0$  et  $(g \circ \gamma)'(t) = 0$ . En particulier,  $0 \in I$ , donc  
 $0 = (g \circ \gamma)'(0) = dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dg(a)(v)$  donc  $v \in \ker(dg(a))$  et par  
 égalité des dimensions,  $T_a M = \ker(dg(a))$ .

③ Montrons que  $T_a M \subset \ker(df(a))$

Soit  $v \in T_a M$ ,  $I$  intervalle ouvert centré en 0,  $\gamma: I \rightarrow M \cup V$  de classe  $\mathcal{C}^1$   
 tel que  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma'(0) = v$  (quitte à restreindre  $I$ ). Comme  $a$  est un ext.  
 de  $f$  sur  $M$ , 0 est un extremum de  $f \circ \gamma$  sur  $I$ . Donc  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$   
 Or,  $(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(a)(v)$  donc  $v \in \ker(df(a))$ .  
 Donc  $T_a M \subset \ker(df(a))$ .

On a donc montré  $T_a M = \ker(dg(a)) = \bigcap_{i=1}^p \ker(dg_i(a)) \subset \ker(df(a))$   
 De plus, comme  $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$  sont linéairement indépendantes,  
 on peut appliquer le lemme et on obtient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tels que  
 $df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a)$ .

Si l'on a l'algèbre: ne pas démontrer le ① (ou à la fin si le temps)  
 Si l'on a l'analyse: ne pas démontrer le lemme (ou à la fin si le temps)