

Théorème de Cartan-Dieudonné

Remilitari
Perron

Recasages: 103, (148), 158, 159, 161, (170), 191

→ Inutile dans le DEV!

Théorème: Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ telles que $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Le sous-espace vectoriel $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$ est alors de dimension $n-r$. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension m , il existe alors une famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ de formes linéaires sur E de rang $n-m$, telles que $F = \bigcap_{i=1}^r \ker(\varphi_i)$.

Preuve: Soient $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans E^* de rang r . Soit $G = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. On a $\dim(G) = r$. Si $r=0$, on a $F = E$. On suppose $r \neq 0$.

$$x \in F \Leftrightarrow \forall i \in [1; p], \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in G^\circ \text{ donc } F = G^\circ.$$

$$\text{Donc } \dim(F) = n - \dim(G) = n - r.$$

• Réciproquement, soit F un sev de E , $\dim(F) = m$. Si $m=0$, alors $F = \{0\}$ donc $F = \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ avec $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E^* . Si $m=n$, alors $F = E = \ker(0)$. Si $m \in [1; n-1]$, une base $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de F peut se compléter en une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $(e_i^*)_{m+1 \leq i \leq n}$ soit une base de $F^\perp$.

$$x \in F \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \Leftrightarrow \forall i \in [m+1; n], e_i^*(x) = 0$$

$$\text{Donc } F = \bigcap_{i=1}^r \ker(\varphi_i) \text{ où } r = n - m \text{ et } \varphi_i = e_{m+i}^*, 1 \leq i \leq r.$$

Théorème: Soit q une forme quadratique définie positive (la forme bilinéaire associée est donc un produit scalaire). Le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $u \in O(q)$, u est produit d'au plus r réflexions avec $r = \text{rg}(u - \text{Id}_E)$. De plus, ce nombre r est minimal.

Preuve: Soit $u \in O(q)$ et $p_u = n - \dim(\ker(u - \text{Id}_E))$. On raisonne par récurrence sur p_u .

• Si $p_u = 0$, $u = \text{Id}_E$ et u est produit d'au plus 0 réflexions.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $p_k \leq n$. Soit $u \in O(q)$ tel que $p_u = n+1$.
 Soit $x \in \ker(u - Id_E)^\perp$, $x \neq 0$ et $y = u(x)$. On a $y \perp x$ (car $x \notin \ker(u - Id_E)$)
 et $y \in \ker(u - Id_E)^\perp$ car u stabilise $\ker(u - Id_E)$ donc $\ker(u - Id_E)^\perp$.
 De plus, $\|x\| = \|y\|$ donc $\langle x-y | x+y \rangle = 0$ de sorte que $x-y$ est orthogonal à $x+y$.

Soit alors T la réflexion par rapport à $\text{Vect}(x-y)^\perp$. On a :

$$T(x-y) = y-x \text{ et } T(x+y) = x+y \text{ donc } T(y) = x$$

De plus, comme $E(u(x)) = x$ donc $T|_{\ker(u - Id_E)} = Id$ donc $\ker(u - Id_E) \subset \ker T$
 et comme $x \in \ker(Tu - Id_E) \setminus \ker(u - Id_E)$, on a $p_{Tu} < p_u$. Par
 hypothèse de récurrence, on peut écrire $Tu = T_1 \dots T_k$ avec $k \leq n$ et
 donc $u = T T_1 \dots T_k$ avec $k \leq n$.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour toute valeur
 de p_u entre 0 et n .

Montrons que p_u est minimal : si $u = T_1 \circ \dots \circ T_p$ avec T_i réflexion par
 rapport à l'hyperplan H_i . On a $H_1 \cap \dots \cap H_p \subseteq \ker(u - Id_E)$ et
 $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n-p$ donc $n-p \leq n-p_u$ et $p_u \leq p$.

* $\otimes$ réflexion pla à H_i donc $\begin{cases} T_i(x) = x & \text{si } x \in H_i \\ T_i(x) = -x & \text{si } x \in H_i^\perp \end{cases}$
 Soit $x \in H_1 \cap \dots \cap H_p$, alors $u(x) = x = T_1 \circ \dots \circ T_p(x) = x = x - x = 0$

* $\otimes$ Par récurrence sur p :

- Si $p=1$, $\dim(H_1) = n-1$ (def d'un hyperplan)
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang p .

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) &= \dim(\underbrace{H_1 \cap \dots \cap H_p}_F \cap H_{p+1}) \\ &= \underbrace{\dim(F)}_{\geq n-p} + \underbrace{\dim(H_{p+1})}_{= n-1} - \underbrace{\dim(F + H_{p+1})}_{\geq n} \\ &\geq n-p-1 = n-(p+1) \end{aligned}$$

* $\otimes$ Pour $SO(a)$, voir page d'avant

→ Dev d'après

*** Théorème:** Pour $n \geq 3$, $SO(q)$ est engendré par les renversements. Précisément, tout élément $u \in SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Preuve. 1) Si $n=3$, si $u \neq Id$, $u = T_1 T_2$ où T_1, T_2 sont des réflexions. Mais, comme $n=3$, $-T_i = \sigma_i$ est un renversement et on a $u = \sigma_1 \sigma_2$.

2) Pour $n \geq 3$ quelconque, soit $u \in SO(q)$, $u = T_1 \dots T_p$ avec $p \leq n$ les T_i étant des réflexions.

Il reste à montrer que si T_1, T_2 sont des réflexions, il en existe σ_1, σ_2 des renversements tels que $T_1 T_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Soit $u = T_1 T_2$. Soient H_1, H_2 les hyperplans de T_1 et T_2 et V un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n-3$ de $H_1 \cap H_2$ ($n \geq 3$). On a $u|_V = Id$ et donc $u(V^\perp) \subset V^\perp$. Par le cas 1), on a $u|_{V^\perp} = \sigma_1 \sigma_2$ où σ_i est un renversement de $V^\perp$, et on obtient le résultat si on prolonge les σ_i par l'identité sur V .

* Soit $x \in V^\perp$
 $y \in V$,

$$\begin{aligned} \langle u(x) | y \rangle &= \langle u(x) | u(y) \rangle \\ &= \langle x | y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $u(x) \in V^\perp$