

# Étude de la fonction Gamma

Romald  
Analyse réelle

Références: 228, 239, 236, 244

Proposition: Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . La fonction  $\Gamma$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , log-convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

Preuve:  $\forall x > 0$ ,  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

- $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$  intégrable au voisinage de 0 et  $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc intégrable au voisinage de  $+\infty$  donc bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $f(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ ,  $f$  est donc intégrable et  $\forall t > 0$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus, soit  $a < b$  tels que  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ .

$\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = |\ln(t)|^k t^{x-1} e^{-t} \leq g_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$g_k$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc par théorème,  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x > 0$ ,  $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ .

- $\ln(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $(\ln(t))^n = \frac{(\Gamma'(t) - \Gamma(t))^2}{t^2}$ . Or, par Cauchy-Schwarz, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} (\Gamma'(x))^2 &= \left( \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \leq \left( \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt \right)^2 \\ &\leq \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma''(x) \Gamma(x) \end{aligned}$$

Donc  $(\ln(\Gamma))'' \geq 0$  donc  $\Gamma$  est log-convexe (donc convexe).

- Une intégration par parties donne:  $\forall x > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[ -t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Donc  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

## Théorème de Bohr - Mollerup

Rombaldi  
(Analyse réelle)

ine

Recommandations: 229, 253

Ce développement peut être couplé avec le précédent mais il faut alors enlever le lemme d'Euler.

Théorème (Bohr - Mollerup): Soit  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une solution de l'équation fonctionnelle  $f(x+1) = x f(x)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et log-convexe, alors il existe une constante  $\lambda$  telle que  $f = \lambda \Gamma$ .

Preuve: La fonction  $g = \ln(f)$  est convexe donc, en notant pour  $x \neq y$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $p(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$ , on a pour tout  $x \in ]0; 1[$ ;  $\rightarrow$  on peut s'y reconnaître car  $f(x+1) = x f(x)$

$$p(m, m+1) \leq p(m+1, m+1+x) \leq p(m+1, m+2) \quad (\text{inégalité des pentes})$$

$$\ln(f(m+1)) - \ln(f(m)) \leq \frac{\ln(f(m+1+x)) - \ln(f(m+1))}{x} \leq \ln(f(m+2)) - \ln(f(m+1))$$

Comme  $f(m+1) = m f(m)$ , cette inégalité s'écrit:

$$\ln(m^x) \leq \ln\left(\frac{f(m+1+x)}{f(m+1)}\right) \leq \ln((m+1)^x)$$

En écrivant que  $\frac{f(m+1+x)}{f(m+1)} = \frac{(x+m)(x+m-1) \dots x f(x)}{m! f(1)}$ , on a:

$$\ln(m^x) \leq \ln\left(\frac{(x+m)(x+m-1) \dots x f(x)}{m! f(1)}\right) \leq \ln((m+1)^x)$$

En notant  $\Gamma_m(x) = \frac{m! m^x}{x(x+1) \dots (x+m)}$  :

$$\ln(m^x) \leq \ln\left(\frac{m^x}{\Gamma_m(x)} \frac{f(x)}{f(1)}\right) \leq \ln((m+1)^x)$$

i.e  $0 \leq \ln\left(\frac{1}{\Gamma_m(x)} \frac{f(x)}{f(1)}\right) \leq \ln\left(\frac{(m+1)^x}{m^x}\right)$ . Par croissance de exp,

$$\forall x \in ]0; 1[, \forall n \geq 1, 1 \leq \frac{1}{\Gamma_n(x)} \frac{f(x)}{f(1)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

En faisant tendre  $n \rightarrow \infty$ , on déduit du lemme d'Euler que:  $f(x) = f(1) \Gamma(x)$  pour tout  $x \in ]0; 1[$ . En utilisant le fait que  $f(x+1) = x f(x)$  et  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ , on déduit que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x+1) = x f(x)$ .