Processus de Galton-Watson — Delmas, Modèles aléatoires

Recasages : 229, (226), 253, 264

Définition : Soit $(\xi_i^n)_{n\geq 0, i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $p_k = P(\xi_i^n = k)$.
On les suppose de carré intégrable, $m = E[\xi_i^n]$, $\sigma^2 = E[(\xi_i^n - m)^2]$ et $G(s) = E[s^{\xi_i^n}]$, $s\in[0;1]$. On s'intéresse au processus :
$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$
On s'intéresse à la probabilité d'extinction $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(Z_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$
On a $\eta = \lim G_n(0)$ où $G_n(s) = E[s^{Z_n}]$.

Savoir montrer le thm de continuité croissante
↓
on pose $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $B_0 = A_0$, (B_n) sont disjoints. Par croissance $P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$
$P(\bigcup A_n) = P(\bigcup B_n) = \sum P(A_n) - P(A_{n-1}) = \lim P(A_n)$.

Lemme : 1) G est bien définie sur $[0;1]$, de classe $\mathcal{C}^2$, convexe sur $[0;1]$
2) G est strictement croissante sur $]0;1]$
3) G est strictement convexe sur $]0;1] \iff p_0 + p_1 < 1$.

Preuve : 1) $E[s^{\xi_i^n}] = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$. La série $\sum p_k s^k$ converge normalement sur $[0;1]$ (car $\sum p_k$ converge vers 1) donc est bien définie et continue sur $[0;1]$. De plus, $\sum k p_k$ et $\sum k(k-1)p_k$ convergent donc les séries entières associées convergent normalement sur $[0;1]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et pour tout $s\in[0;1]$,
$G'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k s^{k-1}$ et $G''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$
2) $\forall s\in]0;1]$, $G'(s) > 0$ car $p_0 \in]0;1[$ donc $\exists k>0$, $p_k > 0$ et $G'(t) \geq k p_k t^{k-1}$ donc G est strictement croissante sur $]0;1]$
3) Si $p_0 + p_1 < 1$, $\exists k > 1$, $p_k > 0$ donc G est strictement convexe sur $]0;1]$

Lemme : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_n(s) = \overbrace{G\circ\cdots\circ G}^{n \text{ fois}}(s)$ et $E[Z_n] = m^n$

Preuve : On procède par récurrence sur n.
• $n=1$: $G_1(s) = E[s^{Z_1}] = E[s^{\xi_1^0}] = G(s)$ et $E[Z_1] = m = m^1$.
• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang n.
$G_{n+1}(s) = E[s^{Z_{n+1}}] = E\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(Z_n = k)} s^{\sum_{i=1}^{k}\xi_i^n}\right]$

(*)

- G est convexe donc $G''>0$. Si on a $s_1 \neq s_2$ deux racines de $G(s)=s$ dans $]0;1[$, $H(s_1)=H(s_2)$ donc par Rolle $\exists s_3 \in]s_1;s_2[$, $H'(s_3)=0$. Idem : $\exists s_4 \in]s_2;1[$, $H'(s_4)=0$. $\exists s_5 \in]s_3;s_4[$, $H''(s_5)=0$ ↯.

Par le théorème de convergence monotone,

$$G_{n+1}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} E\left[\mathbb{1}_{(Z_n=k)}\, s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{n}}\right]$$

$Z_n \in \sigma(\xi^{n-1})$ ind de ξ_i^n

$$G_{n+1}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n=k)\, E\left[s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{n}}\right] \quad \text{par indépendance}$$

$$G_{n+1}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n=k)\, G(s)^k \quad \text{à nouveau par indépendance}$$

$$G_{n+1}(s)=G_n(G(s))=\underbrace{G\circ\cdots\circ G}_{n+1}(s) \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$E[Z_{n+1}]=G'_{n+1}(1)=G'(1)\,G_n'(G(1))=m\times m^n=m^{n+1}$$

Théorème : Si $p_0 \in]0;1[$, la probabilité d'extinction η est la plus petite racine positive de l'équation $G(s)=s$.
Si $m\leq 1$, $\eta=1$ et si $m>1$, $\eta<1$.

Preuve : $G_{n+1}(0)=G(G_n(0))$ donc par passage à la limite et continuité $\eta=G(\eta)$.

(*) Raisonner par l'absurde et appliquer Rolle à la dérivée.

→ Si $p_1=1$, tous les $s\in[0;1]$ sont racines

→ Si $p_1<1$, $p_0+p_1=1$, $s=1$ est la seule racine car G est affine.

→ Si $p_0+p_1<1$, G est strictement convexe donc (*) il y a au plus une autre racine que 1. Notons $\underline{s}$ la plus petite racine. Par croissance de G, $G(0)\leq G(\underline{s})=\underline{s}$ et en itérant, $G_n(0)\leq \underline{s}$ et par passage à la limite, $\eta\leq\underline{s}$ et comme η est racine, on a $\eta=\underline{s}$.

On termine en dressant un tableau de signes de $H : s\mapsto G(s)-s$

. Si $m\leq 1$:

x	0		1
H'	$p_1-1<0$	$-$	$m-1\leq 0$
H	$p_0>0$	↘	

H' croissante : $H'(0)<0$, $H'(1)\leq 0$ donc $H'\leq 0$

. Si $m>1$:

x	0		η		α		1
H'	$p_1-1<0$	$-$			0	$+$	$m-1>0$
H	$p_0>0$	↘	0	↘	$H(\alpha)<0$	↗	0

TVI

TVI

On a $H''\geq 0$. Si $\exists x_1\in]0;1[$, $H'(x_1)>0$ on aurait par TVI : $\exists x_0\in]0;x_1[$, $H'(x_0)=0$

$H'(0)>0$ et $H'(1)<0$ donc $\exists \dots$

Le signe de H' s'obtient en raisonn...