

Théorème de Cauchy-Lipschitz (Berthelot, p. 87)

→ surtout le cas de G. Lanchon!

Recapitulés: 220, 221

Théorème: Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach. $\Omega \subset I \times E$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow E$ continue. On suppose que pour tout $J \subset I$ compact:

$$\exists k_J \geq 0, \forall x, y \in E, \forall t \in J, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_J \|x - y\|$$

Alors, $\forall (t_0, u_0) \in \Omega$, $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = u_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I .

Preuve: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de I dans E par:

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \text{ et } u_0(t) = u_0.$$

Comme f est continue, u_n est $\mathcal{C}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $J = [a, b] \subset I$ tel que $a < t_0 < b$. Soit $k_J \geq 0$. Montrons par récurrence:

$$P_n: \forall t \in J, \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq A \frac{k_J^n}{n!} |t - t_0|^n \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

• $n=0$: $\exists M > 0, \forall t \in J, \|f(t)\| \leq M$ car J est compact et f continue. $\forall t \in J, \|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u_0(s))\| ds \right| \leq M(b-a) := A$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n vraie. Soit $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|u_{n+2}(t) - u_{n+1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k_J \|u_{n+1}(s) - u_n(s)\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{A k_J^{n+1}}{n!} |s - t_0|^n ds \right| \\ &= A \frac{k_J^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} \end{aligned}$$

• Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, $(\mathcal{C}(J, E), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach et $\sum A \frac{k_J^n (b-a)^n}{n!}$ converge donc $\sum \|u_{n+1} - u_n\|_\infty$ converge donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément sur J vers une limite notée u qui est continue sur J .

Intégrale ?? → Intégrale de Riemann car f continue dans $\mathbb{R}$ Banach

Règle des q'de valeurs vectorielles.

sur un segment → la théorie de Riemann est la même.

Or, $\forall s \in J, \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| \leq k \|u_n(s) - u(s)\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

I est localement compact. Donc $f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u(s))$ sur J .

Donc: $\forall t \in J, u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$, vrai aussi pour tout J .
Donc u est solution de $(*)$.

Pour l'unicité, soit v une autre solution de $(*)$. Alors:

$\forall t \in J, v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$ donc:

$$\forall t \in J, \|u(t) - v(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds$$

Soit $J = [a, b] \subset I$ tel que $a < t_0 < b$, k_J bornée.

Alors: $\forall t \in J, \|u(t) - v(t)\| \leq k \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| ds$

Donc par le lemme de Gronwall, $\|u - v\| = 0$ sur J donc sur I (car vrai pour tout J).

Corollaire: Soit $\Omega = I \times E$, $A: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $b: I \rightarrow E$ continues.

Alors: $\forall (t_0, u_0) \in \Omega$, $(*)$:
$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I .

Preuve: f est continue sur $I \times E$ par somme et composition.

Soit $J \subset I$ compact. Alors, $A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est continue donc bornée.

sur J : $\exists k \geq 0, \forall t \in J, \|A(t)\| \leq k$

Or, $\forall t \in J, \forall x, y \in E$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\| \leq k \|x - y\|$$

Donc par le théorème précédent, on a le résultat.