

Décomposition LU et de Cholesky

Romblut
(voir aussi AL)

Recasages: 154, 162, (157), (156), (148).

Définition: Les sous-matrices principales de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$.

Théorème: Une matrice $A \in GL_n(K)$ admet une décomposition $A = LU$ si L est triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe, une telle décomposition est unique.

Preuve: CNS donnent l'existence: Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

• $n=1$, ok

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat acquis pour tout $A \in GL_m(K)$.

Soit $A \in GL_{n+1}(K)$ ayant tous ses déterminants principaux non nuls.

On écrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{n+1} \end{pmatrix}$, $a_{n+1} \in K$, $A_1 \in GL_n(K)$, $B_1 \in M_{n,1}(K)$, $C_1 \in M_{1,n}(K)$.

On a $A_1 \in GL_n(K)$ par hypothèse et $a_{n+1} \in K^*$. On applique l'hypothèse de récurrence à A_1 : $A_1 = L_1 U_1$. On pose alors:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 & E_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } D_1, E_1, \alpha \text{ à déterminer}$$

$\exists D_1, E_1, \alpha$ tels que

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 E_1 = B_1 \\ D_1 U_1 = C_1 \\ 0 \cdot E_1 + \alpha = a_{n+1} \end{cases}$$

Comme L_1 est inversible, le système $L_1 E_1 = B_1$ ayant n inconnues et n équations a une unique solution $E_1 = L_1^{-1} B_1$.

De même, U_1 est inversible donc $D_1 U_1 = C_1$ équivaut à $U_1^{-1} D_1 = C_1 U_1^{-1}$ a une unique solution $D_1 \in GL_{n,n-1}(K)$. Enfin, $\alpha = a_{n+1} - D_1 E_1$.
D'où une décomposition LU.

Réciproquement, si $A \in GL_{n+1}(K)$ est telle que $A = LU$, alors U est aussi inversible. De plus, $\det(A) \neq 0$, $A_1 = L_1 U_1 \in GL_n(K)$ car $\det(A_1) = \det(U_1) = \frac{\det A}{\alpha} \neq 0$ et tous les déterminants principaux de A sont non nuls par HR.

Montrons l'unicité: si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2 \in GL_n(K)$, comme toutes les matrices sont inversibles, on a $\underbrace{L_2^{-1} L_1}_{\substack{\text{triang. inf.} \\ \text{diag. unité}}} = \underbrace{U_1 U_2^{-1}}_{\substack{\text{triang. sup.}}} = I_n$ donc $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$

Théorème: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. A est symétrique définie positive si et seulement si il existe B triangulaire inférieure inversible telle que $A = B^t B$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B .

Preuve: Remarquons d'une part que si A est symétrique avec tous ses déterminants principaux non nuls, $A = LU$ et $\det(A) = \det(L) \det(U)$ donc tous les termes diagonaux de U sont non nuls et on peut écrire $U = DU'$ avec D diagonale et U' triangulaire supérieure à diag. unité. Donc $A = LDU'$ et ${}^t A = A \Rightarrow {}^t U' = {}^t L$ (unicité de L)

On a donc l'unique décomposition $A = L D {}^t L$.

$\rightarrow$ Théorème de Sylvester, les $\det(A_k)$ sont > 0

Si $A \in M_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det(A) > 0$, on écrit $A = L D {}^t L$ et alors A et D sont congruentes donc $D = \text{diag}(d_i)$, $d_i > 0$. On peut donc écrire $D = D^{1/2} D^{1/2}$ en posant $B = L D^{1/2}$, on a $A = B^t B$ avec B triangulaire inférieure, la diagonale de B étant formée des $\sqrt{d_i}$.

Réciproquement, si $A = B^t B$, alors A est symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $\langle Ax | x \rangle = \langle B^t B x | x \rangle = \langle {}^t B x | {}^t B x \rangle = \| {}^t B x \|^2$ car B est inversible.

$$\begin{aligned} A &= LDU' \\ {}^t A &= {}^t U' D {}^t L \\ &= A \\ &= LDU' \\ D {}^t L &= D {}^t L \\ &\uparrow \text{unicité} \\ \text{Donc } U' &= {}^t L \end{aligned}$$