

Méthode de Newton et application

Rouvière exo 49
p. 152

223, 224, 226, 218

par une heuristique de la méthode avec des dessins

Soit $f: [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$
pour tout $x \in [c; d]$. On considère la suite récurrente

(x_n) , $n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow$ annulation de la tangente
 $\rightarrow$ on se ramène à un pt. de point fixe.

• Alors, f a un unique zéro a et pour tout $x \in [c; d]$, il existe $z \in [a; x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$

• $\exists \alpha > 0$, tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) converge quadratiquement vers a dans I

• Si de plus, $f'' > 0$ sur $[c; d]$, $I = [a; d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante et :

$$\exists C > 0, 0 \leq x_n - a \leq C(x_{n-1} - a)^2$$
$$x_n - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_{n-1} - a)^2$$

Preuve : Comme $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $[c; d]$ et f est continue donc par le TVI, $\exists ! a \in]c; d[, f(a) = 0$.
On a $F(a) = a$ et $F'(a) = 0$. On a pour $x \in [c; d]$,

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)}$$

$$F(x) - a = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

On applique une formule de Taylor à l'ordre 2 au numérateur sur $[a; x]$. Alors,

$$\exists z \in]a; x[, F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$$

• On obtient que : $\exists C > 0, \forall x \in [c; d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$
en prenant $C = 2 \frac{\max |f''|}{\min |f'|}$ sur $[c; d]$

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour $C\alpha < 1$ et $I = [a-\alpha; a+\alpha] \subset [c; d]$.

Alors : $x \in I \Rightarrow |F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ donc $F(x) \in I$. Donc $F(I) \subset I$

Si $x_0 \in I$, on a donc $x_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$$

d'où $C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$ donc (x_n) converge quelconque vers 1 car $C\alpha < 1$.

• Ici, f' est strictement croissante et f est convexe sur $]c; d[$.
Pour $a \leq x \leq d$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ d'où :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \leq d \text{ (inégalité stricte si } x > a)$$

D'après le premier point, on a :

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2 \geq 0 \text{ (strictement si } x > a)$$

Donc $I = [a; d]$ est stable par F et pour $x_0 \in]a; d]$, on a $x_n \in]a; d]$ et (x_n) est strictement décroissante. Si $x_0 = a$, (x_n) est constante. (x_n) admet donc une limite l vérifiant $F(l) = l$ donc $f(l) = 0$, donc $l = a$. On a aussi : $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et si $a \in]x_0; d]$ on a $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \text{ avec } a < z_n < x_n.$$

$$\text{Donc } \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

Exemple : On fixe $y > 0$ et soit $f: x \in [c; d] \mapsto x^2 - y$ avec $c = 0$ et $d = \sqrt{y}$.

On va approcher $a = \sqrt{y}$. Pour cela, on itère la fonction

$$F: x \in [0; d] \mapsto x - \frac{x^2 - y}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right)$$

Par le premier point, on a $F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2x}$. Pour approcher $-a = -\sqrt{y}$ on itère la même fonction F qui s'écrit donc aussi :

$$F(x) + a = \frac{(x+a)^2}{2x}$$

Donc $\frac{F(x) - a}{F(x) + a} = \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^2$ pour $x \geq 0$ donc $F = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi$ avec $\varphi(x) = \frac{x-a}{x+a}$, $G(t) = t^2$.

$(x_n = F^n(x_0) = (\varphi^{-1} \circ G^n \circ \varphi)(x_0))$ i.e. $\frac{x_n - a}{x_n + a} = \left(\frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)^{2^n}$ —> Récurrent

Pour $x_0 > a$, on en déduit :

$$1 + \frac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0 - a} \right)^{2^n} \geq 1 + \left(\frac{2a}{x_0 - a} \right)^{2^n} \text{ d'où la majoration d'}$$

$$0 < x_n - a \leq 2a \left[\left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a} \right)^{2^n} - 1 \right]^{-1} \leq 2a \left(\frac{x_0 - a}{2a} \right)^{2^n}$$